Observerdesign, kontraksjonsanalyse og aktiv regulering av surge i sentrifugalkompressorer

Hovedoppgave

Jean Nicolai Johannesson

Trondheim, 1 Juni 2004

Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet
Institutt for Teknisk Kybernetikk

Sammendrag

Denne avhandlingen omhandler surgeproblematikken i sentrifugal-kompressorer. Det blir presentert ulike former for surgeregulering, nemlig surge avoidance og aktiv regulering. I tillegg blir leseren introdusert til en stabilitets-teori som kalles kontraksjonsteori. Denne teorien benyttes i stabilitetsanalysen av to tidligere utviklede massestrømsestimatorer og blir også brukt i utvikling av to nye full state tilstandsestimatorer.

I avhandlingen blir to ulike strategier for regulering av sentrifugalkompressoren presentert. Til hver av disse reguleringsstrategiene presenteres en massestrøms-estimator. Begge massestrømsestimatorene blir vist å være globalt kontraherende, altså inkrementelt globalt eksponentielt stabile. De to nye full state estimatorene, en til hver reguleringsstrategi, blir også vist å være inkrementelt globalt eksponentielt stabile. Det blir også utført simuleringer som bekrefter resultatene.

Forord

Dette er en hovedoppgave utført ved institutt for teknisk kybernetikk, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet (NTNU). Jeg vil takke min faglærer førsteamuensis Jan Tommy Gravdahl og veilederen min stipendiat Bjørnar Bøhagen for viktig tilbakemelding og uvurderlig hjelp til oppgaven. Jeg vil spesielt rette takk til sivilingeniør Guttorm Torsetnes for å ha gitt meg verdifull opplæring i kontraksjonsteori og Post Doc Jérôme Jouffroy for å ha vært en viktig rådgiver.

Trondheim, 1. juni 2004

Jean Nicolai Johannesson

Figurer

2.1 Sentrifugalkompressor med kompressorhjul, diffusor og volutt . . . 3
2.2 Kompressorkart med tredjeordens tilnærming av massestrømmen . 4
2.3 Kompressorkart med tredjeordens tilnærming av m og ω. 5
2.4 Kompressorkart med surgelinje 6
2.5 Surgesyklus 7

3.1 Kompressorsystem 8
3.2 Stabile og ustabile likevektspunkter 11

4.1 Kompressorsystem med tettkoblet ventil 13

6.1 Virtuell forskyvning 24
6.2 Trajektorer som konvergerer mot hverandre i en ball i en kontraherende region 26

8.1 Stabile og ustabile likevektspunkter 45
8.2 Simulinkdiagramm for simulering av surge. 45
8.3 Tilstandsforløp med stabilt og ustabilt likevektspunkt simulert over t=20s 46
8.4 Tilstander for stabilt og ustabilt likevektspunkt simulert over t=1000s 47
8.5 Simulinkdiagram for regulering med tettkoblet ventil. 48
8.6 Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp ved simulering med målte tilstander på regulatorinngang. 49
8.7 Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. 50
8.8 Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp upåvirket av støy. 51
8.9 Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av støy. Estimerte tilstander er påvirket av støy. 52
8.10 Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp med påvirkning av støy. 53
8.11 Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy. 54

8.12 Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp uten påvirkning av hvit støy. 55
8.13 Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. 56
8.14 Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp med påvirkning av hvit støy. 57
8.15 Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. 58
8.16 Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp uten påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 59
8.17 Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av hvit og s-tasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. 60
8.18 Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp med påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 61
8.19 Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit og s-tasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. 62
8.20 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp uten påvirkning av støy. 63
8.21 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. 64
8.22 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av stasjonærstøy. 65
8.23 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander med indirekte påvirkning av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy. 66
8.24 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av stasjonærstøy. 69
8.25 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy. . 70
8.26 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit støy. 71
8.27 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. 72
8.28 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av hvit støy. 73

8.29 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. 74
8.30 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 75
8.31 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. 76
8.32 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 77
8.33 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. 78
8.34 Simulinkdiagram for regulering med drivmoment. 79
8.35 Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp ved simulering med målte tilstander på regulatorinngang. 80
8.36 Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. 81
8.37 Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp uten påvirkning av stasjonærstøy. 82
8.38 Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy. 83
8.39 Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp med påvirkning av stasjonærstøy. 84
8.40 Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy. 85
8.41 Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp uten påvirkning av hvit støy. 86
8.42 Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. 87
8.43 Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp med påvirkning av hvit støy. 88
8.44 Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. 89
8.45 Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp uten påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 90

8.46 Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. 91
8.47 Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp med påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 92
8.48 Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. 93
8.49 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp uten påvirkning av støy. 94
8.50 Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. 95
8.51 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløpet er indirekte påvirket stasjonærstøy. 96
8.52 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy. 97
8.53 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av stasjonærstøy. 98
8.54 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy. . 99
8.55 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit støy. Ustabilt. 100
8.56 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstandene er indirekte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. Systemet ble ustabilt. 101
8.57 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit støy. 102
8.58 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. 103
8.59 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av hvit støy. 104
8.60 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. 105
8.61 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 106
8.62 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit og stasjonærstøy. Ustabilt 107

8.63 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. Ustabilt. 108
8.64 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 109
8.65 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. 110
8.66 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av hvit og stasjonærstøy. 111
8.67 Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. 112

B.1 Grafen til $f(z)$ 119

Innhold

Sammendrag **i**

Forord **ii**

1 Innledning **1**

2 Bakgrunnsstoff **2**
- 2.1 Kompressorer 2
- 2.2 Sentrifugalkompressorer 3
  - 2.2.1 Kompressorkarakteristikk 4
- 2.3 Stabilitet i kompressorsystemer 5
  - 2.3.1 Surge 6

3 Modell **8**
- 3.1 Modell 8
  - 3.1.1 Likevektspunkter 10

4 Regulering av surge i sentrifugalkompressorer **12**
- 4.1 Aktiv regulering av surge 12
  - 4.1.1 Regulering med tettkoblet ventil 13
  - 4.1.2 Regulering med drivmoment 16

5 Reduced order tilstandsestimator **18**
- 5.1 Teori 18
  - 5.1.1 Tilstandsestimatoren 18
  - 5.1.2 Stabilitetsanalyse 18
  - 5.1.3 Separasjonsprinsipp 19
- 5.2 Estimator for regulering med tettkoblet ventil 19
  - 5.2.1 Massestrømsestimator for regulering med tettkoblet ventil 20
  - 5.2.2 Feildynamikk 21
- 5.3 Estimator for regulering med drivmoment 21
  - 5.3.1 Massestrømsestimator for regulering med drivmoment 22

5.3.2 Feildynamikk . . . 22

6 Kontraksjonsteori **23**
6.1 Grunnleggende konvergensresultat . . . 23
6.2 Generell kontraksjonsanalyse . . . 26
6.3 Kombinasjoner av kontraherende system . . . 28
6.3.1 Parallell kombinasjon . . . 28
6.3.2 Feedback kombinasjon . . . 29
6.3.3 Hierarki kombinasjon . . . 29

7 Kontraksjonsanalyse på estimatorer **30**
7.1 Modellendringer . . . 30
7.2 Kontraksjonsanalyse på massestrømsestimatorer . . . 31
7.2.1 Estimator for regulering med tettkoblet ventil . . . 31
7.2.2 Estimator for regulering med drivmoment . . . 33
7.3 Full state tilstandsestimator . . . 35
7.3.1 Full state tilstandsestimator for regulering med tettkoblet ventil . . . 35
7.3.2 Full state tilstandsestimator for regulering med drivmoment 39

8 Simuleringer **44**
8.1 Simulering av surge . . . 45
8.2 Full state estimator for regulering med tettkoblet ventil . . . 46
8.2.1 Målte tilstander . . . 47
8.2.2 Målte tilstander med støy . . . 47
8.2.3 Estimerte tilstander . . . 63
8.2.4 Estimerte tilstander med støy . . . 63
8.3 Fullstate estimator for regulering med drivmoment . . . 79
8.3.1 Målte tilstander . . . 79
8.3.2 Målte tilstander med støy . . . 80
8.3.3 Estimerte tilstander . . . 94
8.3.4 Estimerte tilstander med støy . . . 95

9 Konklusjon og videre arbeid **113**

A Stabilitetsteori **117**
A.1 Stabilitetsteori . . . 117

B Grenseverdier **118**

C Beregninger til stabilitetsanalyse **121**
C.1 Full state tilstandsestimator for regulering med tettkoblet ventil . 121
C.2 Full state tilstandsestimator for regulering med drivmoment . . . 124

D Matematisk teori **127**
D.1 Beregning av determinanter 127

Kapittel 1

Innledning

I sentrifugalkompressorer kan det inntreffe en ustabil tilstand som kalles surge eller pumping. For å hindre at denne tilstanden inntrer er det vanlig å benytte et regleringssystem i kompressorsystemet. I denne avhandlingen vil det bli gått nærmere inn på surgeproblematikken. Det vil gis en introduksjon til sentrifugalkompressorer og surgeproblematikken. Deretter utledes en dynamisk modell for kompressorsystemet som vil bli brukt videre til utvikling av reguleringssystem, reduced order tilstandsestimator og full order tilstandsestimator. Videre vil leseren bli introdusert til kontraksjonsteori, en teori som kan brukes til stabilitetsanalyse.

I denne rapporten vil det bli presentert to ulike strategier for å regulere sentrifugalkompressoren, nemlig regulering med tettkoblet ventil og regulering med drivmoment. Videre vil det bli presentert to ulike reduced order tilstandsestimatorer til hver av reguleringsstrategiene. Deretter vil det utvikles full order tilstandsestimatorer til hver av reguleringsstrategiene. Det vil også bli utført stabilitetsanalyse på samtlige av de presenterte tilstandsestimatorene ved hjelp av kontraksjonsteori. Full order tilstandsestimatorene vil bli simulert sammen med sine respektive regulatorer i kompressorsystemet.

Kapittel 2

Bakgrunnsstoff

2.1 Kompressorer

I [10] blir kompressorene delt inn i 4 grupper:

1. Stempelkompressorer
2. Rotasjonskompressorer
3. Aksialkompressorer
4. Sentrifugalkompressorer

Både stempel- og rotasjonskompressorer reduserer volumet for å oppnå kompresjon av mediet. I aksial- og sentrifugalkompressorer øker man trykket på mediet ved at det først aksellereres, for å deretter konvertere mediets kinetiske energi, det vil si hastigheten, til portensiell energi, altså trykk. Dette kan vises ut i fra Bernoullis ligning:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{C_1}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{C_2}{2} + gz_2, \tag{2.1}$$

hvor

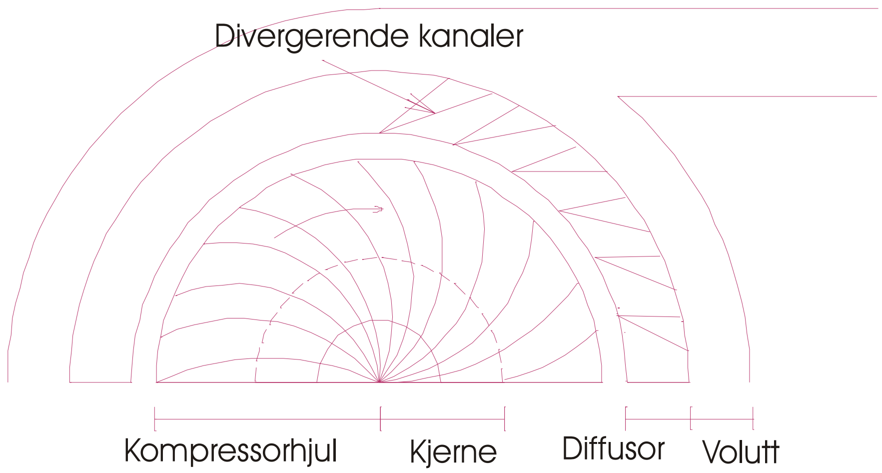
p	trykk
ρ	gassens tetthet
C	gassens hastighet
gz	spesifikk potensiell energi

Indeksene 1 og 2 representerer før og etter retardasjon av hastigheten. Forutsatt at tettheten ρ og at høyden z er konstant kan det sees ut i fra ballansen i ligningen at hvis $C_1 > C_2$ må det bli en trykkøkning, $p_1 < p_2$.

2.2 Sentrifugalkompressorer

Sentrifugalkompressoren består av tre hoveddeler:

- Kompressorhjulet
- Diffusor
- Volutt



Figur 2.1: Sentrifugalkompressor med kompressorhjul, diffusor og volutt

Kompressorhjulets oppgave er å øke hastigheten på det strømmende mediet. Dette oppnås ved at det dannes et undertrykk i hjulets kjerne som trekker fluidet inn for så å slynge det ut ved hjelp av bladene på kompressorhjulet. Rotasjonen forårsaker økt tangentiell hastighet. Sentrifugalkraften fører til økt statisk trykk. Kompressorhjulet danner sammen med akslingen rotoren. Akslingen er forbundet til drivkilden, som kan være en motor eller turbin.

Diffusoren som omslutter kompressorhjulet skal redusere hastigheten til mediet. Denne reduksjonen oppnås ved at strømningene føres gjennom divergerende kanaler. Den kinetiske energien, hastigheten, blir ved hjelp av kanalene konvertert til potensiell energi, som igjen innebærer økt trykk.

Volutten skal samle utstrømningene fra diffusorens kanaler og lede den samlede strømningen til kompressorens utløp med minimalt energitap.

2.2.1 Kompressorkarakteristikk

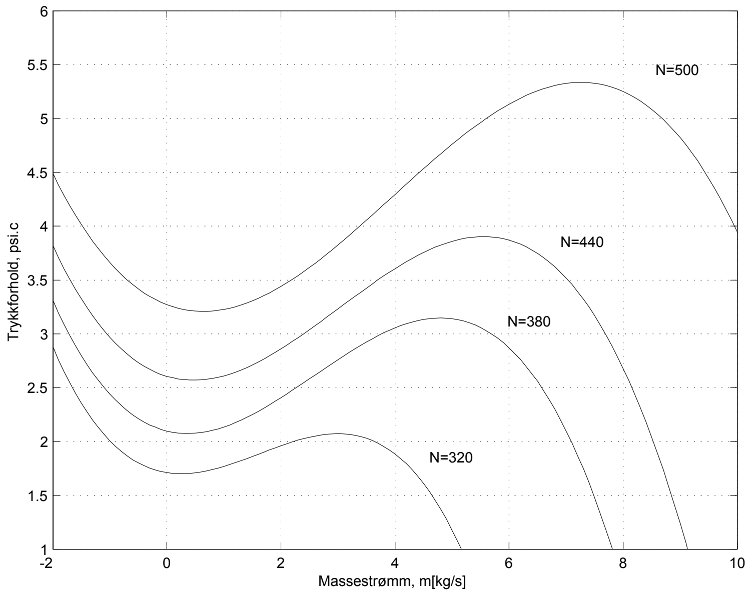
En kompressors oppførsel kan beskrives med en kompressorkarakteristikk. Den blir definert som forholdet mellom kompressorens utløps- og innløpstrykk. Kompressorkarakteristikken blir i [2] utledet ved hjelp av energibasert analyse, hvor det vises at den er avhengig av massestrømmen m og rotasjonshastigheten ω.

Definisjon 1 *(Kompressorkarakteristikk).*

$$\psi_c(m,\omega) = \frac{p_2(m,\omega)}{p_{01}} \tag{2.2}$$

p_{01} *kompressorens innløpstrykk* $[Pa]$
p_2 *kompressorens utløpstrykk* $[Pa]$
m *massestrøm gjennom kompressor* $[kg/s]$
ω *kompressorens rotasjonshastighet* $[rad/s]$

For notasjonens skyld vil $p_2(m,\omega)$ og $\psi_c(m,\omega)$ heretter bli omtalt som p_2 og ψ_c.



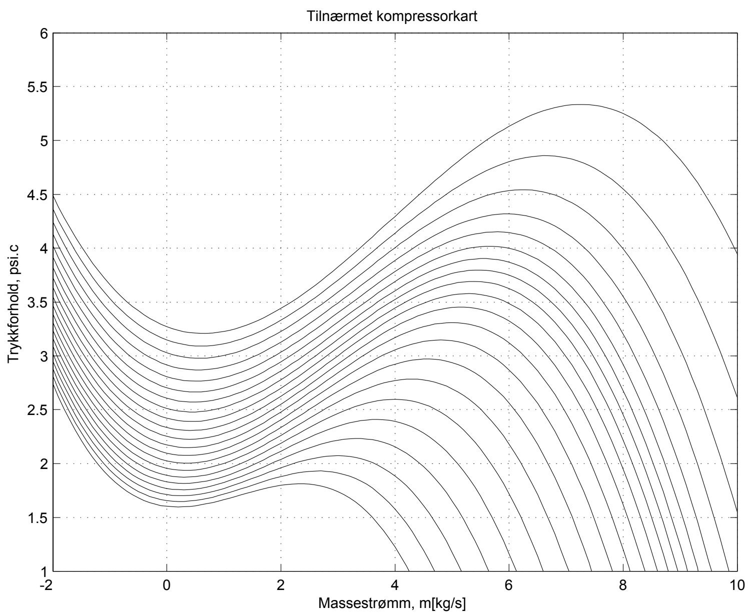
Figur 2.2: Kompressorkart med tredjeordens tilnærming av massestrømmen

Kompressorkarakteristikken blir vanligvis fremstilt i et kompressorkart som vist i figur 2.2, hvor trykkforholdet blir vist som en funksjon av rotasjonshastighet og massestrøm. I figur 2.2 viser kompressorkart hvor kompressoren kjøres i fire ulike rotasjonshastigheter,N=280, N=350, N=420 og N=490 Kompressorkartet blir gjerne funnet ved hjelp av målinger, hvor utløpstrykket måles ved gitte rotasjonshastigheter og massestrømmer. I kompressorkartet i figur 2.2 har det blitt gjort tredjeordens tilnærminger av disse måleresultatene slik at det får hastighetslinjer som er kontinuerlige i m. Kompressorkarakteristikken kan tilnærmes med en tredjeordens ligning, som blir seende slik ut:

$$\psi (m, N) = c_0 (N) + c_1 (N) m + c_2 (N) m^2 + c_3 (N) m^3,$$

hvor hastigheten N er oppgitt i $[omdr/sek]$ og hvor $c_i(N) = c_{i0} + c_{i1}N + c_{i2}N^2 + c_{i3}N^3$. $c_i(N)$ er en funksjon av omdreiningshastigheten.

Figur 2.3 viser et tilnærmet kompressorkart kontinuerlig i m og ω.



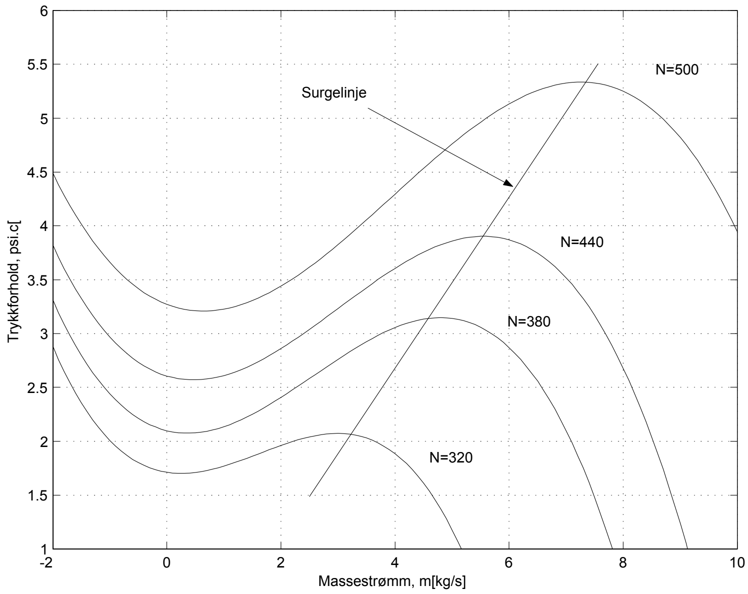
Figur 2.3: Kompressorkart med tredjeordens tilnærming av m og ω.

2.3 Stabilitet i kompressorsystemer

Sentrifugalkompressorenes stabile operasjonsområde er begrenset til et intervall mellom høy og lav massestrøm. Hvis massestrømmen er for høy kan sonisk strupning inntre. Hvis massestrømmen er for lav kan de ustabile tilstandene surge og rotating stall forekomme. Denne avhandlingen vil kun omhandle surge.

2.3.1 Surge

Surge er en ustabilitet som inntrer ved lave massestrømmer. Den kjennetegnes ved oscilleringer i massestrømmen, noe som synliggjør seg som en grensesykel på kompressorkarakteristikken. Surge er stort sett en uønsket tilstand som i verste fall kan være ødeleggende for sentrifugalkompressoren. Oscillasjonene i massestrømmen og trykk kan også skape problemer for systemet som er tilkoblet kompressoren. Det stabile og ustabile området til kompressoren skilles henholdsvis mellom positivt og negativt stigningstall på kompressorkarakteristikken. Dette kan sees i figur 2.4 hvor det stabile og ustabile arbeidsområdet til kompressoren deles av surgelinjen. Arbeidspunkt til venstre for surgelinjen har positivt stigningstall og er ustabile. Arbeidspunktene til høyre for surgelinjen har negativt stigningstall og er derfor stabile.

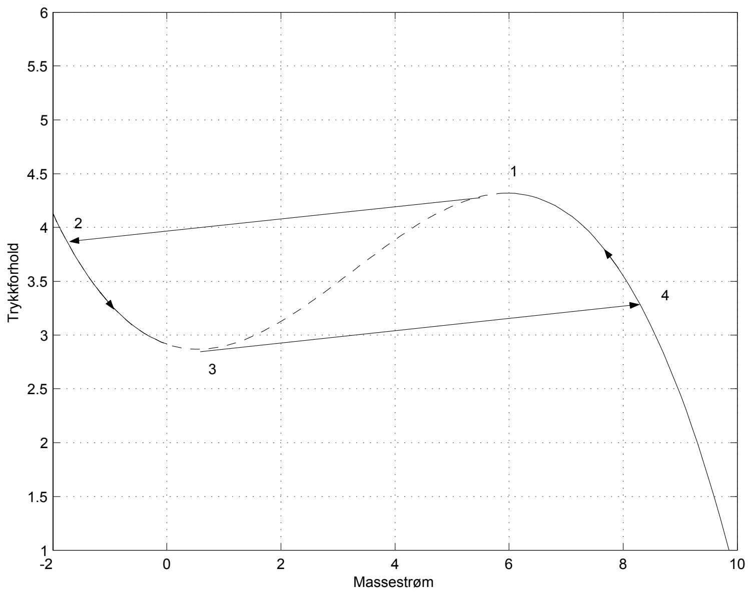


Figur 2.4: Kompressorkart med surgelinje

Det finnes to typer surge:

1. Mild surge
2. Dyp surge

Mild surge klassifiseres ved svingninger i trykk over kompressoren og i massestrømmen som går gjennom. Størrelsen på svingningene er ikke stor nok til å reversere massestrømmen. Dyp surge har også svingninger i trykk og massestrøm.



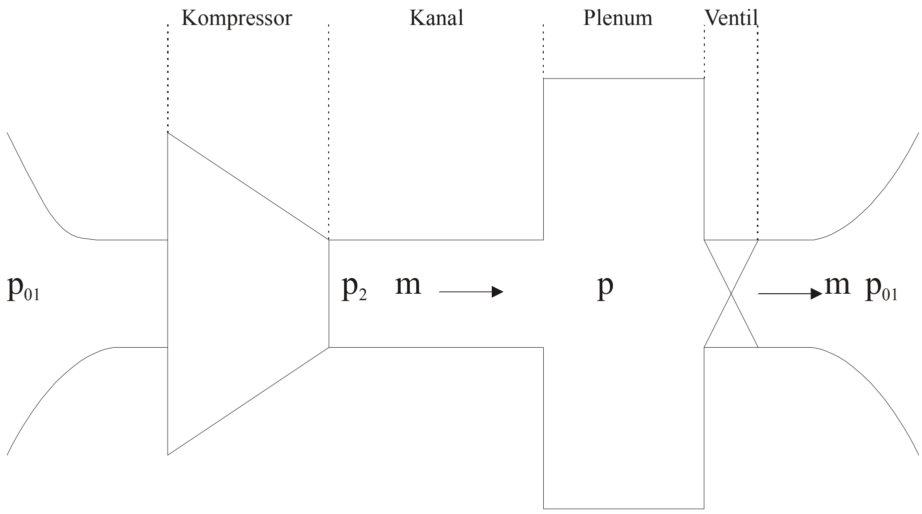
Figur 2.5: Surgesyklus

Det som skiller dyp surge fra mild surge er at amplituden på svingningene i dyp surge er tilstrekkelig til å reversere massestrømmen.

Figur 2.5 er en illustrasjon av en dyp surgesyklus. Syklusen starter i punkt 1 som er i det ustabile området. Deretter går den over til punkt 2 hvor massestrømmen reverseres. Fra punkt 2 følger trykket og massestrømmen kompressor-karakteristikken til punkt 3. Videre gjør massestrømmen et nytt sprang til punkt 4. Derfra følger trykket og massestrømmen kurven til punkt 1. Slik fortsetter syklusen.

Kapittel 3

Modell



Figur 3.1: Kompressorsystem

Kompressorsystemet i denne rapporten er modellert etter Greitzers modell, se [1]. Denne modellen utledes på grunnlag av kompressorens karakteristikk og systemet den er tilknyttet, og består av 4 deler: kompressor, kanal, plenum og reguleringsventil som vist i figur 3.1.

3.1 Modell

Modellen utledes ved hjelp av masseballanse over plenum, impulsballanse over kanal og momentballanse for rotor. De resulterende differensialligningene ser da slik ut:

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t) && (3.1)\\
\dot{m} &= \frac{A_1}{L_c}(p_2 - p) && (3.2)\\
\dot{\omega} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \tau_c) && (3.3)
\end{aligned}
$$

hvor

p	trykk i beholder $[Pa]$
p_2	trykk ved kompressorens utløp $[Pa]$
m	massestrøm gjennom kompressor og kanal $[kg/s]$
ω	rotorens vinkelhastighet $[rad/s]$
m_t	massestrøm gjennom strupeventil $[kg/s]$
τ_t	drivmoment $[Nm]$
τ_c	lastmoment $[Nm]$
a_{01}	lydhastighet ved omgivelses betingelser $[m/s]$
V_p	volum av plenum $[\mathrm{m}^3]$
A_1	areal av kompressor hjulets kjerne $[\mathrm{m}^3]$
L_c	lengde av kompressor og kanal $[m]$
J	samlet treghet for rotor og drivkilde $[kgm^2]$

Massestrømmen gjennom strupeventilen er gitt ved:

$$m_t = k_t\sqrt{p - p_{01}} \tag{3.4}$$

hvor k_t er proporsjonal med ventilåpningen. Ligning (3.4) er kun gyldig når $p > p_{01}$. Lastmomentet fra kompressoren er gitt av:

$$\tau_c = \sigma r_2^2 \left|m\right| \omega \tag{3.5}$$

hvor $\sigma \in (0, 1)$ er slipfaktor og r_2 er kompressorhjulets radius. Slipfaktoren kompenserer for ikke ideelle forhold i kompressoren, og er hovedsakelig avhengig av antall blader på rotoren.

Ut i fra definisjon 1, ligning (3.4) og (3.5) kan modellen (3.1)-(3.3) omskrives til:

$$
\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t) && (3.6)\\
\dot{m} &= \frac{A_1}{L_c}(\psi_c p_{01} - p) && (3.7)\\
\dot{\omega} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \tau_c) && (3.8)
\end{aligned}
$$

hvor

$$\begin{aligned} m_t &= k_t\sqrt{p - p_{01}} \\ \tau_c &= \sigma r_2^2 \left|m\right| \omega \end{aligned}$$

3.1.1 Likevektspunkter

Ut i fra (3.6)-(3.8) kan likevektspunktene beregnes. De blir som følger:

$$m_0 = m_{t0} = k_t\sqrt{p_0 - p_{01}} \tag{3.9}$$

$$\psi_{c0}(m_0, \omega_0)p_{01} = p_0 \tag{3.10}$$

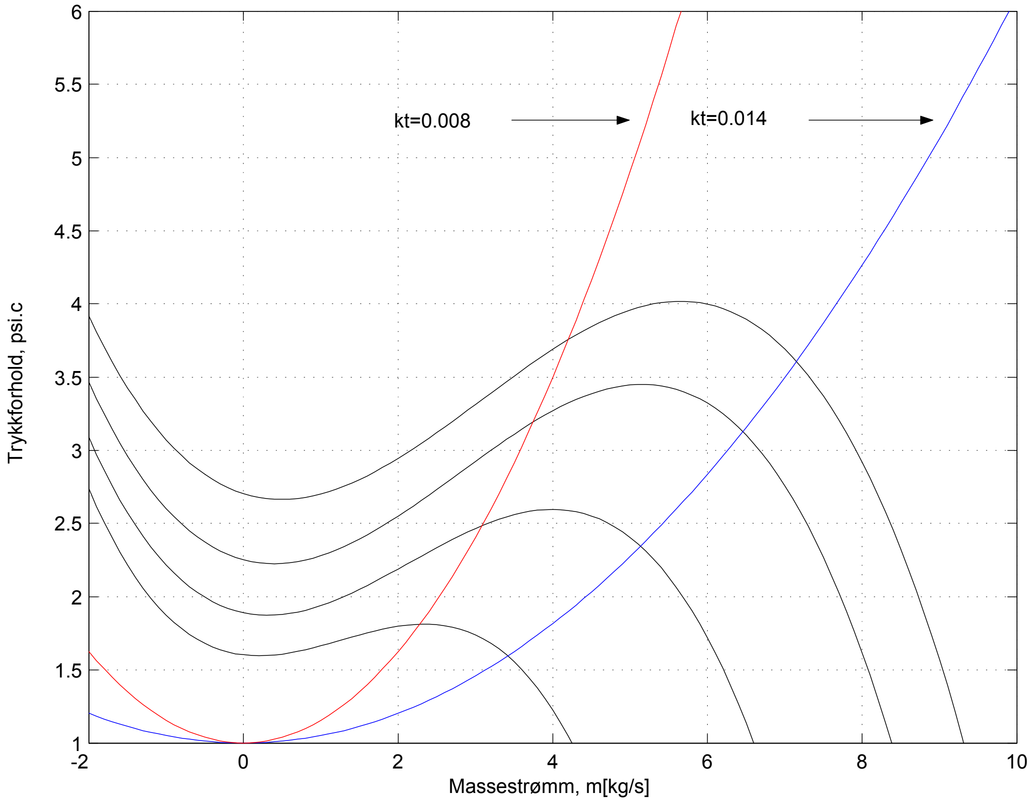
$$\tau_{t0} = \tau_{c0} = \sigma r_2^2 \left|m_0\right| \omega_0, \tag{3.11}$$

hvor m_0, m_{t0}, $\psi_{c0}(m_0, \omega_0)$,τ_{t0} og τ_{c0} er likevektspunktene for systemet. $\psi_{c0}(m_0, \omega_0)$ vil for notajonens skyld videre bli omtalt som ψ_{c0}. Ligningene (3.9) og (3.10) gjør det mulig å sette opp et utrykk for likevektspunktene til kompressorkarakteristikken:

$$\begin{aligned} m_0 &= k_t\sqrt{p_0 - p_{01}} \\ &= k_t\sqrt{\psi_{c0}p_{01} - p_{01}} \\ &\Longrightarrow \psi_{c0} = \frac{m_0^2}{k_t^2 p_{01}} + 1 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Ligning (3.12) gjør det mulig å sette av likevektspunktene i kompressorkartet.

Likevektspunktene i figur 3.2 kan sees ut i fra skjæringspunktene mellom ventilkarakteristikken og kompressorkarakteristikken som er merket av på figuren. På figur 3.2 vises det en 3.ordens tilnærming av kompressorkarakteristikken. På figur 3.2 er kurvene til kompressorkarakteristikken heltrukne, og ventilkarakteristikkens kurver er heltrukne blå eller rød. Ventilkarakteristikken er oppgitt for to ulike ventilåpninger, $k_t = 0.008$ og $k_t = 0.014$. Ut i fra figuren kan det sees at det er bare den ene ventilkarakteristikken som fører til stabile likevektspunkt. Ventilkarakteristikken til høyre, som er heltrukken blå og hvor $k_t = 0.014$, har skjæringspunkt med kompressorkarakteristikken i området hvor kompressorkarakteristikken har negativt stigningstall og har derfor stabile likevektspunkt. Likevektspunktene i skjæringspunktene mellom $k_t = 0.008$ og kompressorkarakteristikken er i området hvor kompressorkarakteristikken har positivt stigningstall og er følgelig ustabile.



Figur 3.2: Stabile og ustabile likevektspunkter

Kapittel 4

Regulering av surge i sentrifugalkompressorer

Standarden for regulering av surge i industrien er *surge avoidance*. Surge avoidance innebærer at reguleringssystemet hindrer kompressoren i å operere i det ustabile surgeområdet. En nyere strategi for regulering av surge er *aktiv regulering*. Ved aktiv regulering av surge er reguleringssystemet laget slik at det stabiliserer de ustabile likevektspunktene. I dette kapittelet vil det bli presentert to strategier for aktiv regulering av surge, regulering med tettkoblet ventil og regulering med drivmoment.

4.1 Aktiv regulering av surge

For å kunne drive aktiv regulering av surge trengs en matematisk modell av kompressorsystemet. Det vil bli presentert to måter for å aktiv regulere surge. Den ene er regulering med tettkoblet ventil, og den andre er regulering med drivmoment.

Definisjon 2 *(Avvik fra likevektspunkt)*

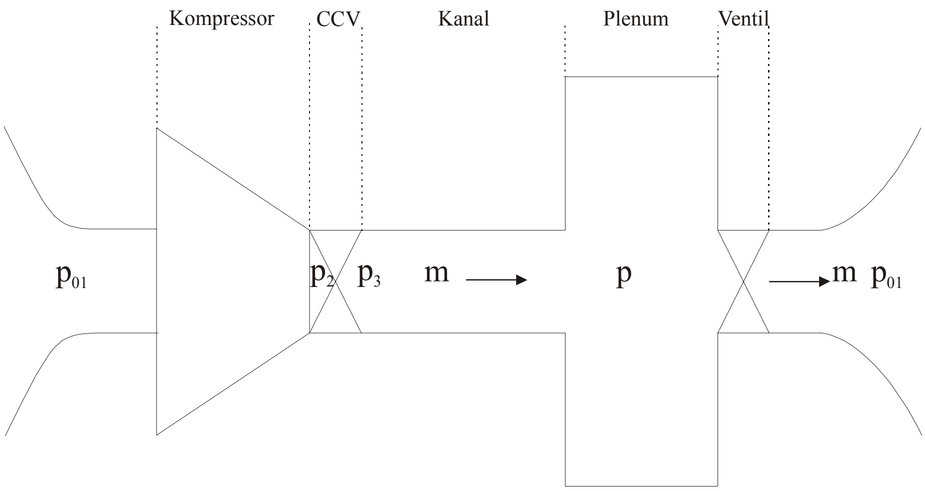
$$\bar{p} = p - p_0 \tag{4.1}$$
$$\bar{m} = m - m_0 \tag{4.2}$$
$$\bar{\omega} = \omega - \omega_0 \tag{4.3}$$

hvor

p_0 er likevektspunkt for trykk (konstant)
m_0 er likevektspunkt for massestrøm (konstant)
ω_0 er likevektspunkt for vinkelhastighet (konstant)

4.1.1 Regulering med tettkoblet ventil

Ved regulering med tettkoblet ventil benytter man seg av en ventil koblet til kompressorens utløp. Ventilen er plassert såpass nære kompressorens utløp at ingen nevneverdig masse kan få plass mellom den og ventilen. Tanken er at denne ventilen skal manipulere kompressorkarakteristikken slik at den totale karakteristikken til ventilen og kompressoren har negativt stigningstall i likevektspunktet. Figur 4.1 viser en figur over kompressorsystemet med tettkoblet ventil.



Figur 4.1: Kompressorsystem med tettkoblet ventil

Modellen til kompressorsystemet er beskrevet av ligningene (3.1)-(3.3):

$$\dot{p} = \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t) \tag{4.4}$$

$$\dot{m} = \frac{A_1}{L_c}(p_3 - p) \tag{4.5}$$

$$\dot{\omega} = \frac{1}{J}(\tau_t - \tau_c) \tag{4.6}$$

hvor p_3 er trykket ved utløpet av den tettkoblede ventilen.

Den samlede karakteristikken for kompressoren og den tettkoblede ventilen kalles ψ_e. ψ_e beskriver trykkforholdet mellom utløpet til den tettkoblede ventilen og innløpet til kompressoren. For å kunne manipulere den samlede karakteristikken er det ønskelig å utrykke den som en funksjon av kompressorkarakteristikken og ventilkarakteristikken. Den samlede karakteristikken blir definert som:

$$
\begin{aligned}
\psi_e &= \frac{p_3}{p_{01}} \\
&= \psi_c - \psi_v, \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

hvor

ψ_c kompressorkarakteristikk
ψ_v karakteristikk for tettkoblet ventil

Det er feilaktig å kalle ψ_v en karakteristikk siden dette leddet ikke representerer trykkforholdet over ventilen. ψ_v sin fysiske betydning kommer tydeligere fram av ligning (4.8), hvor p_3 er trykket ved den tettkoblede ventilens utløp og p_2 er trykket ved utløpet til kompressoren. I denne ligningen fremstår utrykket $\psi_v p_{01} = p_2 - p_3$ som trykkfallet over ventilen.

$$
\begin{aligned}
p_3 &= \psi_c p_{01} - \psi_v p_{01} \\
&= p_2 - \psi_v p_{01} \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Ved bruk definisjon 2 og ligning (4.4)-(4.8) kan differensialligningene for avvik bli funnet. For trykk i plenum blir differensialligningen for avvik:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{p}} &= \dot{p} \\
&= \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t) \\
&= \frac{a_{01}^2}{V_p}(\bar{m} + m_0 - m_t) \\
&= \frac{a_{01}^2}{V_p}(\bar{m} - \bar{m}_t) \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

hvor $\bar{m_t} = m_t - m_0 = m_t - m_{t0} = m_t - k_t\sqrt{p_0 - p_{01}}$. For massestømmen blir differensialligningen for avvik:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{m}} &= \dot{m} \\
&= \frac{A_1}{L_c}(p_3 - p) \\
&= \frac{A_1}{L_c}(\psi_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p) \\
&= \frac{A_1}{L_c}(\psi_c p_{01} - \psi_v p_{01} - \bar{p} - p_0) \\
&= \frac{A_1}{L_c}(\bar{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - \bar{p}) \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

hvor $\bar{\psi}_c = \psi_c - \frac{p_0}{p_{01}} = \psi_c - \psi_{c0}$, forutsatt at $\psi_v = 0$ når $\bar{m}$=$\bar{\omega}$= 0. Ved å benytte definisjon 2 og (3.5) kan differensialligningen for avvik for lastmoment fra kompressor utrykkes:

$$\begin{aligned}
\tau_c &= |m|r_2^2\sigma\omega \\
&= sgn(m)mr_2^2\sigma\omega \\
&= sgn(m)(\bar{m} + m_0)r_2^2\sigma(\bar{\omega} + \omega_0) \\
&= sgn(m)\bar{m}r_2^2\sigma\bar{\omega} + sgn(m)m_0r_2^2\sigma\omega_0 + sgn(m)\bar{m}r_2^2\sigma\bar{\omega} \\
&\quad +sgn(m)m_0r_2^2\sigma\omega_0 \\
&= sgn(m)r_2^2\sigma((\bar{m} + m_0)\bar{\omega} + \bar{m}\omega_0) + sgn(m)m_0r_2^2\sigma\omega_0 \\
&= \bar{\tau}_c + \tau_{c0},
\end{aligned} \tag{4.11}$$

hvor $\bar{\tau}_c = \tau_c - \tau_{c0}$, $\bar{\tau}_c = sgn(m)r_2^2\sigma((\bar{m} + m_0)\bar{\omega} + \bar{m}\omega_0)$ og $\tau_{c0} = sgn(m)m_0r_2^2\sigma\omega_0$. For analysen kreves kontinuerlige funksjoner. Det oppnås ved at leddene $sgn(m)$ byttes ut med $\tanh(\frac{m}{\delta})$, hvor δ er en positiv konstant som bestemmer stigningstallet ved $m = 0$.

For rotasjonshastigheten vil differensialligningen for avvik fra likevektspunktet være gitt ved:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}} &= \dot{\omega} \\
&= \frac{1}{J}(\tau_t - \tau_c) \\
&= \frac{1}{J}(\tau_t - \bar{\tau}_c - \tau_{c0}) \\
&= \frac{1}{J}(\bar{\tau}_t - \bar{\tau}_c),
\end{aligned} \tag{4.12}$$

hvor $\bar{\tau}_t = \tau_t - \tau_{t0}$. $\tau_{t0} = \tau_{c0} = \tanh(\frac{m}{\delta})m_0r_2^2\sigma\omega_0$. Modellen vil nå se slik ut:

$$\dot{\bar{p}} = \frac{a_{01}^2}{V_p}(\bar{m} - \bar{m}_t) \tag{4.13}$$

$$\dot{\bar{m}} = \frac{A_1}{L_c}(\bar{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - \bar{p}) \tag{4.14}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{1}{J}(\bar{\tau}_t - \bar{\tau}_c), \tag{4.15}$$

hvor

$\bar{m}_t$= $m_t - m_{t0} = m_t - k_t\sqrt{p_0 - p_{01}} = m_t - m_0$
$\bar{\psi}_c = \psi_c - \frac{p_0}{p_{01}} = \psi_c - \psi_{c0}$
$\bar{\tau}_t = \tau_t - \tau_{t0}$
$\bar{\tau}_c = \tau_c - \tau_{c0}$

Regulator for tettkoblet ventil I [5] foreslås følgende regulator:
Surgeregulator

$$\psi_v = k_v \, \bar{m} \tag{4.16}$$

Hastighetsregulator

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_t &= -k_p \, \bar{\omega} \, -k_i I \\ \dot{I} &= \bar{\omega} \end{aligned} \tag{4.17}$$

hvor

$$k_v > \sup \left\{ \frac{\partial \psi_c}{\partial m} \right\} + \delta_1 \tag{4.18}$$

Med δ_1, k_p og $k_i > 0$ blir origo i modellen et semiglobalt eksponentielt stabilt likevektspunkt for modellen (4.13)-(4.15). For ytterligere informasjon og stabilitetsbevis henvises leseren til [5].

4.1.2 Regulering med drivmoment

Regulering med drivmoment går ut på å stabilisere systemet i figur 3.1 uten å legge inn nye komponenter i systemet. Dermed unngås økt kompleksitet i systemet og trykkfallet som kan inntreffe over den tettkoblede ventilen.

Modellen for regulering med drivmoment er beskrevet med ligningene (3.6)-(3.8). Ved hjelp av definisjon 1 kan modell (3.6)-(3.8) utledes ut i nye koordinater:

$$\dot{\bar{p}} = \frac{a_{01}^2}{V_p}(\bar{m} - \bar{m}_t) \tag{4.19}$$

$$\dot{\bar{m}} = \frac{A_1}{L_c}(\bar{\psi}_c p_{01} - \bar{p}) \tag{4.20}$$

$$\dot{\bar{\omega}} = \frac{1}{J}(\bar{\tau}_t - \bar{\tau}_c), \tag{4.21}$$

hvor

$\bar{m}_t = m_t - m_{t0} = m_t - k_t\sqrt{p_0 - p_{01}} = m_t - m_0$
$\bar{\psi}_c = \psi_c - \frac{p_0}{p_{01}} = \psi_c - \psi_{c0}$
$\bar{\tau}_t = \tau_t - \tau_{t0}$
$\bar{\tau}_c = \tau_c - \tau_{c0}$

I [2] ble en regulator lansert som medfører globalt eksponentielt stabilt likevektspunkt for modellen (4.19)-(4.20):

$$\bar{\omega} = -k_s\, \bar{m}, \tag{4.22}$$

hvor

$$k_s > \sup\left\{\frac{\partial\psi_c/\partial m}{\partial\psi_c/\partial\omega}\right\}$$

Lyapunovfunksjonskandidaten (4.23) ble brukt i stabilitetsanalysen:

$$V(\bar{p}, \bar{m}) = \frac{V_p}{a_{01}^2}\, \bar{p}^2 + \frac{L_c}{A_1}\, \bar{m}^2, \tag{4.23}$$

Med den tidsderiverte av (4.23) langs løsningen (4.19)-(4.20) ble det vist at:

$$\dot{V}\,(\bar{p}, \bar{m}) < -k_p\, \bar{p}^2 - k_m\, \bar{m}^2, \tag{4.24}$$

hvor $k_p > 0$ er avhengig av stigningstallet til strupeventilens karakteristikk og $k_m > 0$ er avhengig av stigningstallet til kompressorkarakteristikken.

Surgeregulatoren gitt av (4.22) må kombineres med en hastighetsregulator for å oppnå ønsket rotasjonshastighet. Ønsket rotasjonshastighet er:

$$\omega_d = \omega_0 - k_s\, \bar{m}, \tag{4.25}$$

hvor ω_d er ønsket rotasjonshastighet og ω_0 er ønsket likevektspunkt.

Regulator for surgeregulering med drivmoment

I [2] foreslås følgende regulator:

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_d &= k_{\bar{\omega}}(\omega_d - \omega) \\ &= k_{\bar{\omega}}\, \bar{\omega} - k_{\bar{\omega}} k_s\, \bar{m} \\ &= k_{\bar{\omega}}\, \bar{\omega} - k_{\bar{m}}\, \bar{m},\end{aligned} \tag{4.26}$$

hvor

$$\begin{aligned} k_{\bar{m}} &= k_{\bar{\omega}} k_s \\ k_{\bar{\omega}} &> 0 \\ k_s &> \sup\left\{\tfrac{\partial\psi_c/\partial m}{\partial\psi_c/\partial\omega}\right\}\end{aligned}$$

Regulatoren sørger for modellen (4.19)-(4.21) konvergerer eksponentielt mot et område rundt origo. Stabilitetsanalyse er å finne i [2].

Kapittel 5

Reduced order tilstandsestimator

I kapittel 4 ble det presentert to regulatorer for aktiv surgeregulering som baserer seg på tilbakekobling av massestrøm. Måling av massestrømmen i et kompressorsystem er vanskelig å gjennomføre, siden måleutstyr for massestrøm av gass er kostbare og lite pålitelige. Derfor er det viktig å kunne beregne massestrømmen, slik at estimatet kan brukes videre i tilbakekoblingen.

5.1 Teori

5.1.1 Tilstandsestimatoren

Estimatorene som blir presentert i dette kapittelet er utviklet i [3]. Massestrømsestimatorene er utledet ved å bruke et kopi av modell (3.2). I tillegg har det blitt lagt til et korreksjonsledd som skal korrigere mulige avvik mellom estimert og målt verdi. Denne type tilstandsestimatorer blir definert som lukket sløyfe estimatorer siden den benytter korreksjonsleddet som en regulator. Prinsippet for denne typen estimatorer er å finne i [11] og [12] hvor de er illustrert for det lineære tilfellet. Massestrømsestimatoren ser slik ut:

$$\dot{\hat{m}} = \dot{m}_c + k_m(m - \hat{m}),$$

hvor $\hat{m}$ er estimert massestrøm, m_c er kopi av modell (3.2) og k_m er estimatorforsterkningen. Korreksjonesleddet i masseestimatoren ovenfor inneholder den virkelige verdien av massestrømmen m. Siden m ikke er målbar kan ikke estimatoren implementeres på formen ovenfor. I kapittel 5.2 og 5.3 vil det bli presentert løsninger for dette problemet.

5.1.2 Stabilitetsanalyse

Stabilitetsanalysen av estimatoren tar utgangspunkt i virkelig og estimert massestrøm.

Definisjon 3 *(Estimeringsavvik)*

$$\tilde{m} = m - \hat{m},$$

hvor $\hat{m}$ er estimert massestrøm og $\tilde{m}$ er avvik mellom virkelig verdi og estimert verdi.

Ved å derivere $\tilde{m}$ er det mulig å finne feildynamikken. Det er ønskelig at feildynamikken har et stabilt likevektspunkt i origo. Hvis dette er tilfelle vil estimert verdi bli og forbli lik virkelig verdi. teorem 8 i Tillegg A.1 benyttes i stabilitetsanalysen.

5.1.3 Separasjonsprinsipp

I analysen av stabilitetsegenskapene til det regulerte systemet, hvor de estimerte verdiene brukes i regulatoren, blir systemet betraktet som et kaskadesystem. Ved å bruke et separasjonsprinsipp kan det vises at de estimerte verdiene kan brukes i regulatoren. Separasjonsprinsippet muliggjør å dimensjonere estimator og regulator hver for seg. Kaskadesystemet fra [7] er på formen:

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &: \quad \dot{x}_1 = f_1(x_1) \\ \sum\nolimits_2 &: \quad \dot{x}_2 = f_2(x_2) \\ \sum\nolimits_3 &: \quad \dot{x}_3 = f_1(x_1) + g(x_1, x_2), \end{aligned}$$

hvor kaskadesystemet $\sum_3$ er en sammenkobling av to systemer. I [3] ble følgende kaskadesystem benyttet:

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_1 &: \quad \dot{x}_1 = f_1(x_1) + g(x_1, x_2)x_2 \\ \sum\nolimits_2 &: \quad \dot{x}_2 = f_2(x_2), \end{aligned}$$

hvor $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ er feildynamikken til det regulerte systemet og $\sum_2$ vil være feildynamikken til estimatoren. Leddet $g(x_1, x_2)x_2$ introduserer estimerte verdier til regulatoren. Stabiliteten til kaskadesystemet , $\sum_1$, avhenger av stabilitetsegenskapene til $\dot{x}_2 = f_2(x_2)$, $\dot{x}_1 = f_1(x_1)$ og $g(x_1, x_2)x_2$. For stabilitetsanalyse av estimator og kaskadesystem henvises leseren til [3].

5.2 Estimator for regulering med tettkoblet ventil

Ved å kopiere (4.5) og (4.8), og legge til et korreksjonsledd framkommer estimatordynamikken:

$$
\begin{aligned}
\dot{\hat{m}} &= \frac{A_1}{L_c}(p_3 - p) + k_{\tilde{m}}\tilde{m} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}),
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

hvor $k_{\tilde{m}}\tilde{m}$ er korreksjonsleddet og $\psi_v p_{01}$ er kjent pådrag. $\hat{\psi}_c = \hat{\psi}_c(\hat{m}, \omega)$ er estimert kompressorkarakteristikk, som beregnes ved hjelp av estimert massestrøm og målt rotasjonshastighet. Det er ikke mulig å implementere estimatoren (5.1) siden ikke målbare m er å finne i korreksjonsleddet. Dette problemet omgås som i [6] ved å definere variabelen:

$$
z = \hat{m} - k_z p \tag{5.2}
$$

hvor k_z er en konstant som velges fritt. Ved å bruke (4.4) og (5.1) blir den deriverte av (5.2):

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \dot{\hat{m}} - k_z \dot{p} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}) - k_z\left(\frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t)\right) \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z\frac{a_{01}^2}{V_p}m_t \\
&\quad + (k_{\tilde{m}} - k_z\frac{a_{01}^2}{V_p})m
\end{aligned} \tag{5.3}
$$

k_z må velges slik at $\dot{z}$ er uavhengig av m:

$$
k_z = \frac{V_p}{a_{01}^2}k_{\tilde{m}} \tag{5.4}
$$

5.2.1 Massestrømsestimator for regulering med tettkoblet ventil

Ut i fra (5.2)-(5.4) kan den implementerbare estimatoren utledes:

$$
\hat{m} = z + k_z p \tag{5.5}
$$

$$
\dot{z} = \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z\frac{a_{01}^2}{V_p}m_t, \tag{5.6}
$$

hvor ω og p benyttes som målinger.

5.2.2 Feildynamikk

Ved å derivere avviket mellom virkelig og estimert massestrøm blir feildynamikken for massestrømsestimatoren funnet. Hvis feildynamikken har et stabilt likevekspunkt i origo vil avviket mellom virkelig og estimert verdi være null. Utrykket for feildynamikken er:

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{m}} &= \dot{m} - \dot{\hat{m}} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\psi_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) - \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) - k_{\tilde{m}}\tilde{m} \\
&= \frac{A_1}{L_c}(\psi_c - \hat{\psi}_c)p_{01} - k_{\tilde{m}}\tilde{m} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\tilde{\psi}_c p_{01} - k_{\tilde{m}}\tilde{m}, \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

hvor $\tilde{\psi}_c = \psi_c - \hat{\psi}_c$. Feildynamikken (5.7) blir i [3] vist å være eksponentielt stabil. Separasjonsprinsippet i [3] viser at systemet er stabilt når estimert verdi benyttes i regulatoren.

5.3 Estimator for regulering med drivmoment

Ved å kopiere (4.5) og legge til et korreksjonsledd framkommer estimatordynamikken:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{m}} &= \frac{A_1}{L_c}(p_2 - p) + k_{\tilde{m}}\tilde{m} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}), \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

hvor $k_{\tilde{m}}\tilde{m}$ er korreksjonsleddet og $\psi_v p_{01}$ er kjent pådrag. $\hat{\psi}_c = \hat{\psi}_c(\hat{m}, \omega)$ er estimert kompressorkarakteristikk, som beregnes ved hjelp av estimert massestrøm og målt rotasjonshastighet. Estimatoren (5.8) er ikke implementerbar siden den ikke målbare tilstanden m er å finne i differensialligningen. Dette problemet omgås som i kapittel 5.2 ved å definere variabelen:

$$z = \hat{m} - k_z p \qquad (5.9)$$

hvor k_z er en konstant som velges fritt. Ved å bruke (3.1) og (5.8) blir den deriverte av (5.9):

$$
\begin{aligned}
\dot{z} &= \dot{\hat{m}} - k_z \dot{p} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}) - k_z(\frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t)) \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - p\right) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z\frac{a_{01}^2}{V_p}m_t + (k_{\tilde{m}} - k_z\frac{a_{01}^2}{V_p})m \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

k_z må velges slik at $\dot{z}$ er uavhengig av m:

$$
k_z = \frac{V_p}{a_{01}^2}k_{\tilde{m}} \qquad (5.11)
$$

5.3.1 Massestrømsestimator for regulering med drivmoment

Ut i fra (5.9)-(5.11) kan den implementerbare estimatoren utledes:

$$
\hat{m} = z + k_z p \qquad (5.12)
$$

$$
\dot{z} = \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - p\right) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z\frac{a_{01}^2}{V_p}m_t, \qquad (5.13)
$$

hvor ω og p benyttes som målinger.

5.3.2 Feildynamikk

Ved å derivere avviket mellom virkelig og estimert massestrøm blir feildynamikken for massestrømsestimatoren funnet. Hvis feildynamikken har et stabilt likevekspunkt i origo vil avviket mellom virkelig og estimert verdi være null. Utrykket for feildynamikken er:

$$
\begin{aligned}
\dot{\tilde{m}} &= \dot{m} - \dot{\hat{m}} \\
&= \frac{A_1}{L_c}(\psi_c p_{01} - p) - \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - p\right) - k_{\tilde{m}}\tilde{m} \\
&= \frac{A_1}{L_c}(\psi_c - \hat{\psi}_c)p_{01} - k_{\tilde{m}}\tilde{m} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\tilde{\psi}_c p_{01} - k_{\tilde{m}}\tilde{m}, \qquad (5.14)
\end{aligned}
$$

hvor $\tilde{\psi}_c = \psi_c - \hat{\psi}_c$. Feildynamikken (5.14) blir i [3] vist å være eksponentielt stabil. Separasjonsprinsippet i [3] viser at systemet er stabilt når estimert verdi benyttes i regulatoren.

Kapittel 6

Kontraksjonsteori

Kontraksjonsteori er et nylig utviklet verktøy som kan brukes til å studere inkrementell stabilitet i ulineære systemer på tilstandsromform. Inkrementell stabilitet innebærer trajektorene konvergerer mot hverandre, i stedet for konvergens mot origo. Det er arbeidene til Lohmiller og Slotine har skapt oppmerksomhet rundt kontraksjonsteori.

I dette kapittelet vil begrepene uniformt negativt definitt og uniformt strengt negativt definitt bli brukt. For at en funksjon $g(x,t)$ skal være uniformt negativt definitt (u.n.d.) må:

$$g(x,t) \leq 0 \quad \forall x, \forall t > 0 \tag{6.1}$$

For at en funksjon $g(x,t)$ skal være uniformt strengt negativt definitt (u.s.n.d.) må:

$$g(x,t) \leq -\beta < 0 \quad \exists \beta > 0, \forall x, \forall t > 0 \tag{6.2}$$

I kapittelet vil leseren vil få en innføring i kontraksjonsteori etterfulgt av noen eksempler på bruk av kontraksjonsteori. Det vil også inneholde en kort innføring i inkrementell stabilitet. Resultatene og informasjonen til dette kapittelet er hentet fra [14], [16], [13], [18], [15], [17], [19] og [20].

6.1 Grunnleggende konvergensresultat

Et ulineært system kan skrives på formen:

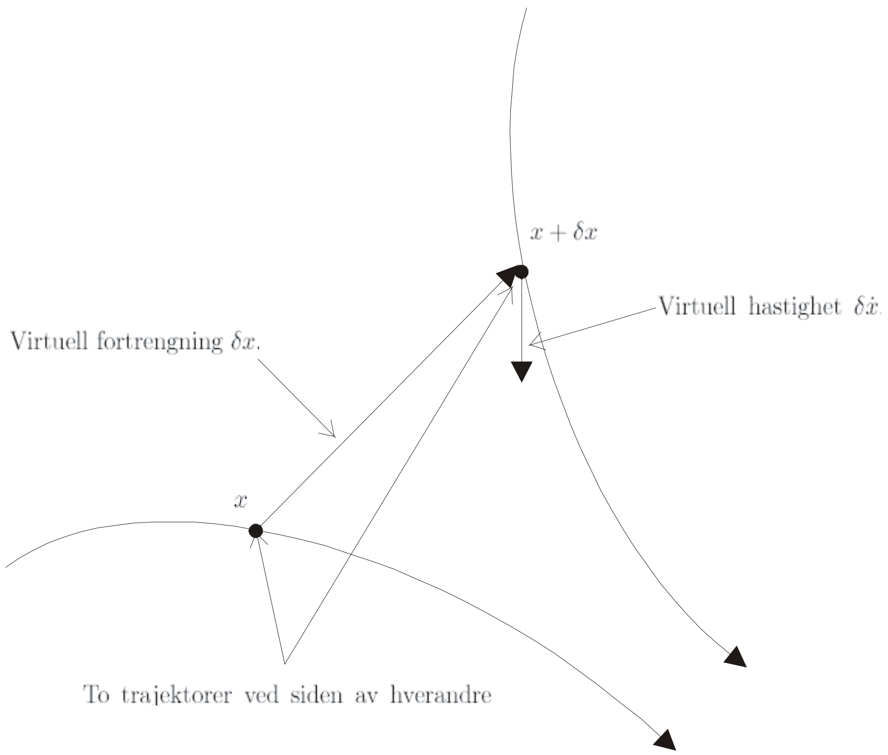
$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u(x), t) \\ &= f(x,t) \end{aligned} \tag{6.3}$$

hvor $f(x,t)$ er en $n \times 1$ ulineær vektor funksjon og x er en $n \times 1$ tilstandsvektor. Ligning (6.3) kan også representere lukket sløyfe dynamikken til et system med tilstandstilbakekoblingen $u(x,t)$. Modellen i kapittel 7er antatt å være reelle og glatte, noe som innebærer at alle nødvendige deriverte eller partiell deriverte finnes og er kontinuerlige.

Systemet i ligning (6.3) kan sees på som en n-dimensjonal fluidstrømning, hvor $\dot{x}$ er en n-dimensjonal "hastighetsvektor" ved den n-dimensjonelle posisjonsvektoren x ved tiden t. Anta at $f(x,t)$ er kontinuerlig deriverbar, da kan ligning (6.3) føre til den eksakte differensielle relasjonen:

$$\delta\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\delta x, \tag{6.4}$$

hvor δx er virtuell forskyvning, som er en uendelig liten forskyvning ved tidspunktet ved en gitt tid.



Figur 6.1: Virtuell forskyvning

Anta at det finnes to trajektorer ved siden av hverandre i et strømningsområde $\dot{x} = f\,(x,t)$, og hvor δx er den virtuelle forskyvningen mellom dem. Dette er vist i figur 6.1. Kvadratet av avstanden mellom disse to trajektorene kan defineres som $\delta x^T \delta x$. Ved hjelp av ligning (6.4) blirendringen av avstanden beskrevet som:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\delta x^T \delta x\right) &= 2\delta x^T \delta \dot{x} = 2\delta x^T \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\delta x \\
&= \delta x^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial x}^T(x,t)\right)\delta x + \\
&\quad \delta x^T \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial f}{\partial x}^T(x,t)\right)\delta x \\
&= \delta x^T E(x,t)\,\delta x + \delta x^T \Omega(x,t)\,\delta x, \qquad (6.5)
\end{aligned}$$

hvor er $E(x,t)$ symmetrisk og $\Omega(x,t)$ er skjevsymmetrisk.$\lambda_{\max}(x,t)$ er største egenverdi for den symmetriske delen av jacobien $\frac{\partial f}{\partial x}$, med andre ord største egenverdi av $E(x,t)$. Da blir:

$$\delta x^T E(x,t)\,\delta x \leq \lambda_{\max}(x,t)\,\delta x^T \delta x, \qquad (6.6)$$

slik at ligning (6.6) indikerer

$$\frac{d}{dt}\left(\delta x^T \delta x\right) \leq \lambda_{\max}(x,t)\delta x^T \delta x, \qquad (6.7)$$

og videre

$$\frac{d}{dt}\|\delta x\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(x,t)\,\|\delta x\|_2^2, \qquad (6.8)$$

som videre er

$$\|\delta x\| \leq \|\delta x_0\|\, e^{\int_0^t \lambda_{\max}(x,\tau)d\tau} \qquad (6.9)$$

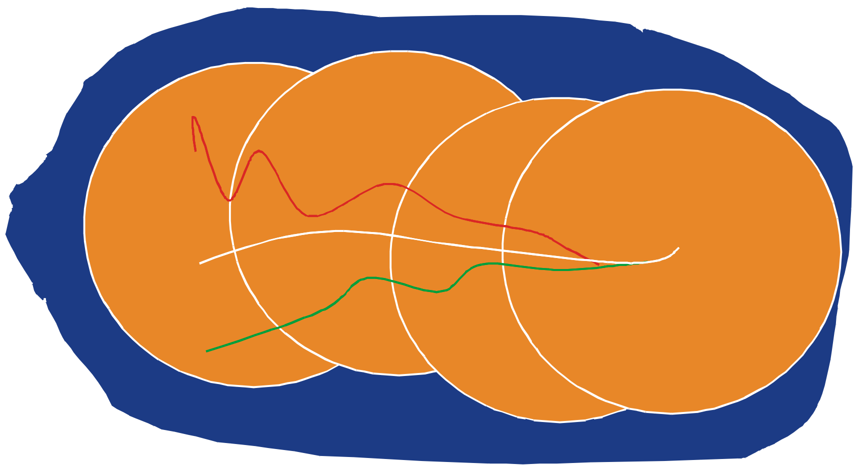
Anta videre at $\lambda_{\max}(x,t)$ er uniformt strengt negativ.Det vil si:

$$\exists\beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \quad \lambda_{\max}(x,t) \leq -\beta < 0$$

Ut i fra ligning (6.9) vil enhver uendelig liten avstand mellom to trajektorer $\|\delta x\|$ konvergere eksponentielt mot null. Dette fører til definisjonen:

Definisjon 4 *Gitt systemligningene $\dot{x} = f(x,t)$, blir et område av tilstandsrommet kalt en kontraherende region hvis jacobien $\frac{\partial f}{\partial x}$ er uniformt negativ definitt i det området. At $\frac{\partial f}{\partial x}$ er uniformt negativ definitt innebærer at*

$$\exists\beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}^T\right) \leq -\beta I < 0 \qquad (6.10)$$



Figur 6.2: Trajektorer som konvergerer mot hverandre i en ball i en kontraherende region

Anta at det finnes en ball med konstant radius sentrert rundt en gitt trajektor. Gitt at denne trajektoren er slik at ballen er innenfor en kontraherende region til enhver tid (dvs $\forall t \geq 0$). Fordi enhver avstand mellom to trajektorer innenfor ballen minker eksponentielt, vil alle trajektorer som starter i ballen bli i ballen (siden det er definert at sentrum av ballen er en systemtrajektor) og konvergere eksponensielt til den gitte trajektoren. Dette kan sees i figur 6.2. Som med stabile lineære tidsinvariante systemer (LTI), blir initial betingelsene eksponentielt "glemt". Dette fører til følgende teorem:

Theorem 5 *Gitt systemligningene $\dot{x} = f(x,t)$, vil en hvilken som helst trajektor, som starter i en ball med konstant radius sentrert rundt en gitt trajektor og innesperret til enhver tid i en kontraherende region, forbli i denne ballen og konvergere eksponentielt mot den gitte trajektoren. Videre vil global eksponentiell konvergens til den gitte trajektoren være garantert hvis hele tilstandsrommet er en kontraherende region.*

6.2 Generell kontraksjonsanalyse

Betraktningene i kapittel 6.1 gjelder også når det blir brukt differensiell koordinattransformasjon:

$$\delta z = \Theta(x,t)\,\delta x, \tag{6.11}$$

hvor $\Theta(x,t)$ er en kvadratisk matrise. For notasjons skyld omtales $\Theta(x,t)$ heretter som Θ. Den tidsderiverte av lokalkoordinatene δz kan skrives som:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta z &= \dot{\Theta}\delta x + \Theta\delta\dot{x} \\ &= \left(\dot{\Theta} + \Theta\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Theta^{-1}\delta z = F\delta z,\end{aligned} \tag{6.12}$$

hvor

$$F = \left(\dot{\Theta} + \Theta\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Theta^{-1} \tag{6.13}$$

F blir kalt *den generaliserte jacobien*. Endringsraten av en kvadratisk lengde kan da skrives som:

$$\frac{d}{dt}\left(\delta z^T\delta z\right) = 2\delta z^T\frac{d}{dt}\delta z = 2\delta z^T F\delta z \tag{6.14}$$

Det betyr at systemet $\dot{x} = f\left(x, t\right)$ er i en kontraherende region hvis *den generaliserte jacobien* er uniformt negativt definitt i dette området. Endringsraten kan også utrykkes i δx koordinater:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\delta x^T M\delta x\right) &= \delta\dot{x}^T M\delta x + \delta x^T\dot{M}\delta x + \delta x^T M\delta\dot{x} \\ &= \delta x^T\frac{\partial f}{\partial x}^T M\delta x + \delta x^T\dot{M}\delta x + \delta x^T M\frac{\partial f}{\partial x}\delta x \\ &= 2\delta x^T(\frac{\partial f}{\partial x}^T M + \dot{M} + M\frac{\partial f}{\partial x})\delta x,\end{aligned} \tag{6.15}$$

hvor $M = \Theta^T\Theta$ er symmetrisk og uniformt positivt definitt metrikk. Eksponentiell konvergens mot en enkel trajektor oppnås i områder hvor:

$$\frac{\partial f}{\partial x}^T M + \dot{M} + M\frac{\partial f}{\partial x} < -2\beta_M M, \tag{6.16}$$

hvor $\beta_M > 0$. De kontraherende regionene man finner med ligning (6.16) vil være nøyaktig lik de man finner med uniformt negativt definitt F i ligning (6.12).

Resultatene nevnt tidligere i kapitlet resulterer i følgende generaliserte definisjon:

Definisjon 6 *Gitt systemligningene $\dot{x} = f\left(x, t\right)$, blir et område av tilstandsrommet kalt en kontraherende region med hensyn på den uniformt positivt definitt metrikk $M(x,t) = \Theta^T\Theta$, hvis F i ligning (6.12) eller hvis :*

$$\frac{\partial f}{\partial x}^T M + \dot{M} + M\frac{\partial f}{\partial x} \tag{6.17}$$

er uniformt negativ definitt i det området.

Det generelle konvergensresultatet blir da:

Theorem 7 *Gitt systemligningene $\dot{x} = f(x,t)$, vil en hvilken som helst trajektor, som starter i en ball som har konstant radius med hensyn på metrikk $M(x,t)$ og er sentrert rundt en gitt trajektor og innesperret til enhver tid i en kontraherende region med hensyn på $M(x,t)$, forbli i denne ballen og konvergere eksponentielt mot den gitte trajektoren. Videre vil global eksponentiell konvergens til den gitte trajektoren være garantert hvis hele tilstandsrommet er en kontraherende region med hensyn på.$M(x,t)$.*

Resultat fra [20] viser at kvadratisk inkrementelt stabile system er også uniformt globalt eksponentielt stabile eller uniformt ekponentielt stabile. Hvis et system er kontraherende, som innebærer at det er inkrementelt stabilt, vil alle trajektorer i det kontraherende området konvergere eksponentielt mot hverandre. Dette er i følge [20] en sterkere form for stabilitet enn at et system er UGES med hensyn på origo, noe som er et vanlig resultat med lyapunovanalyse. For ytterligere informasjon henvises leseren til [20].

6.3 Kombinasjoner av kontraherende system

6.3.1 Parallell kombinasjon

Betrakt to systemer med samme dimmensjon:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, t), \quad (6.18) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, t), \quad (6.19) \end{aligned}$$

med virtuell dynamikk:

$$\begin{aligned} \delta\dot{z}_1 &= F_1 \delta z, \quad (6.20) \\ \delta\dot{z}_2 &= F_2 \delta z, \quad (6.21) \end{aligned}$$

Hvis begge systemene er kontraherende i samme metrikk, er også en hvilken som helst uniformt positiv superposisjon kontraherende:

$$\alpha_1(t)\,\delta\dot{z}_1 + \alpha_2(t)\,\delta\dot{z}_2, \quad (6.22)$$

hvor $\exists \quad \alpha > 0, \forall t \geq 0, \alpha_i(t) \geq \alpha(t)$.

6.3.2 Feedback kombinasjon

Betrakt to systemer med muligens ulik dimmensjon:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, t), && (6.23) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, t), && (6.24) \end{aligned}$$

som er forbundet i en feedback kombinasjon, slik at virtuell dynamikken blir:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 & G \\ -G^T & F_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{bmatrix}, \tag{6.25}$$

Det augmenterte systemet er kontraherende hvis og bare hvis de separate systemene er kontraherende.

6.3.3 Hierarki kombinasjon

Betrakt to kontraherende systemer med muligens ulik dimmensjon og metrik, forbundet i serier, hvor virtuell dynamikken blir på formen:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & 0 \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta z_1 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} \tag{6.26}$$

Den første ligningen er ikke avhengig av den andre. Dermed kan det konkluderes at med en uniformt negativt definitt F_{11} vil δz_1 oppleve eksponentiell konvergens mot null.Gitt at F_{21} er begrenset. Da vil $F_{21}\delta z_1$ representere en eksponensielt avtagende forstyrrelse i den andre ligingen. Hvis hvert delsystem er kontraherende vil F_{22} være uniformt negativt definitt og det indikerer at δz_2 konvergerer eksponentielt mot null. Det augmenterte systemet er også kontraherende, og ved rekursjon kan resultatet benyttes til kaskader av kontraherende systemer med vilkårlig dybde.

Det er også verdt og merke seg at den hierarkiske kombinasjonen i ligning (6.26) korresponderer med samme type kombinasjon som blir brukt i arbeidene til Loria og Panteley i [7], også kalt kaskader av ulineære systemer. For mer inngående informasjon henvises leseren til [13].

Kapittel 7

Kontraksjonsanalyse på estimatorer

I dette kapittelet vil det bli utført stabilitetsanalyse ved hjelp av kontraksjonsteori på to tilstandsestimatorer lansert i [3] og som er nevnt i kapittel 5. Det er blitt laget en massetrømsestimator til hver av reguleringsstrategiene i kapittel 4. I tillegg vil det bli designet en ny full state tilstandsestimator til hver av reguleringsstrategiene presentert i kapittel 4.

Stabilitetsanalysen vil med samtlige estimatorer bli utført med følgende metodikk, utviklet i [20]:

- Først sette opp ligningssystemet til modellen ($\dot{x} = f(x, t)$).
- Sette opp ligningenssystemet til estimatordynamikken.
- Definere et virtuelt system med partikulærløsningene til begge modellene.
- Analysere virtuelldynamikken til det virtuelle systemet for å kunne konkludere hvorvidt systemet er kontraherende eller ei.

For ytterligere informasjon om stabilitetsanalysen anbefales det å lese [20].

7.1 Modellendringer

I kontraksjonsanalyse er kravene til modellen at alle verdier må være reelle og glatte, noe som innebærer at alle nødvendige deriverte eller partiell deriverte må eksistere og være kontinuerlige. Dette nødvendiggjør en mindre endring av modellen fra kapittel 3:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t) && (7.1)\\
\dot{m} &= \frac{A_1}{L_c}(p_2 - p) && (7.2)\\
\dot{\omega} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \tau_c), && (7.3)
\end{aligned}$$

hvor

$$\begin{aligned}
m_t &= k_t\sqrt{p - p_{01}}\\
\tau_c &= \sigma r_2^2 \left|m\right| \omega
\end{aligned}$$

m_t er massestrømmen gjennom strupeventilen. Med denne modellen av ventilen blir verdier hvor $p < p_{01}$ komplekse. For å kunne benytte kontraksjonsanalyse må modellen av strupeventilen endres til å bli en modell av strupning. Det vil si at mediet vil kunne strømme i to retninger, i stedet for en. Med denne endringen vil p kunne være alle reelle verdier. m_t blir da seende slik ut:

$$m_t = k_t sign\left(p - p_{01}\right)\sqrt{\left|p - p_{01}\right|} \tag{7.4}$$

Den nye modellen, hvor alle verdier er reelle, modelleres da som:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - k_t sign\left(p - p_{01}\right)\sqrt{\left|p - p_{01}\right|}) && (7.5)\\
\dot{m} &= \frac{A_1}{L_c}(p_2 - p) && (7.6)\\
\dot{\omega} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \left|m\right| \omega), && (7.7)
\end{aligned}$$

7.2 Kontraksjonsanalyse på massestrømsestimatorer

7.2.1 Estimator for regulering med tettkoblet ventil

Massestrømsestimatoren som er presentert i kapittel 5.2 er:

$$\dot{\hat{m}} = \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}), \tag{7.8}$$

hvor $k_{\tilde{m}}(m - \hat{m})$ er korreksjonsleddet og $\psi_v p_{01}$ er kjent pådrag. $\hat{\psi}_c = \hat{\psi}_c(\hat{m}, \omega)$ er estimert kompressorkarakteristikk, som beregnes ved hjelp av estimert masse strøm og målt rotasjonshastighet. Fordi m ikke tilgjengelig som måling er ikke estimatoren (7.8) implementerbar. Dette løses som i [6] ved å definere variabelen:

$$z = \hat{m} - k_z p \tag{7.9}$$

Den implementerbare estimatordynamikken er da gitt ved:

$$\dot{z} = \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p} m_t \tag{7.10}$$

Utledning av z-dynamikken er å finne i kapittel 5.2. Som tidligere nevnt er z-dynamikken den implementerbare estimatordynamikken. I stabilitetsanalysen benyttes $\hat{m}$-dynamikken:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{m}} &= \dot{z} + k_z \dot{p} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c(\hat{m},\omega) p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p} m_t + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t) \\
&= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c(\hat{m},\omega) p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m})
\end{aligned} \tag{7.11}$$

I utledningen av $\hat{m}$-dynamikken ovenfor er det brukt at $k_z = \frac{V_p}{a_{01}^2} k_{\tilde{m}}$. Massestrømsdynamikken er gitt ved:

$$\dot{m} = \frac{A_1}{L_c}\left(\psi_c(m,\omega) p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - m) \tag{7.12}$$

Videre er det verdt å merke seg at (7.11) og (7.12) kan blir brukt sammen til å definere det følgende virtuelle system:

$$\dot{x} = \frac{A_1}{L_c}\left(\psi_c(x,\omega) p_{01} - \psi_v p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - x) \tag{7.13}$$

Det virtuelle systemet kan skrives som $\dot{x} = f(x,t)$, hvor ω,ψ_v, p og m betraktes som tidsvarierende funksjoner. Ut i fra (7.13) kan det sees at hvis $x = m$ får man massestrømsdynamikken, og hvis $x = \hat{m}$ får man estimatordynamikken. Fra ligning (6.10) er kravet for at systemet skal være i en kontraherende region:

$$\beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}^T\right) \leq -\beta I < 0$$

Det betyr at:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}^T\right)\leq -\beta < 0 \tag{7.14}$$

Den partiellderiverte til dynamikken til det virtuelle systemet er:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}^T=\frac{A_1}{L_c}\frac{\partial \psi_c\left(x,\omega\right)}{\partial x}-k_{\tilde{m}} \tag{7.15}$$

Setter inn (7.15) i (7.14) og får:

$$\frac{A_1}{L_c}\frac{\partial \psi_c\left(x,\omega\right)}{\partial x}p_{01}-k_{\tilde{m}}\leq -\beta < 0 \tag{7.16}$$

For at ulikhet (7.16) skal være innfridd må $k_{\tilde{m}} \geq \frac{A_1}{L_c}\sup(\frac{\partial\psi_c(x,\omega)}{\partial x})p_{01}+\beta$, hvor $\beta > 0$. Da er estimatoren globalt kontraherende og $\hat{m}$ konvergerer eksponentielt mot m.

7.2.2 Estimator for regulering med drivmoment

Massestrømsestimatoren som er presentert i kapittel 5.3 er:

$$\dot{\hat{m}}=\frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01}-p\right)+k_{\tilde{m}}(m-\hat{m}), \tag{7.17}$$

hvor $k_{\tilde{m}}(m-\hat{m})$ er korreksjonsleddet og $\psi_v p_{01}$ er kjent pådrag. $\hat{\psi}_c=\hat{\psi}_c(\hat{m},\omega)$ er estimert kompressorkarakteristikk, som beregnes ved hjelp av estimert massestrøm og målt rotasjonshastighet. Fordi m ikke tilgjengelig som måling er ikke estimatoren (7.17) implementerbar. Dette løses som i [6] ved å definere variabelen:

$$z=\hat{m}-k_z p \tag{7.18}$$

Estimatordynamikken er da gitt ved:

$$\dot{z}=\frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c p_{01}-p\right)-k_{\tilde{m}}\hat{m}+k_z\frac{a_{01}^2}{V_p}m_t \tag{7.19}$$

Utledning av z-dynamikken er å finne i kapittel 5.3. Som tidligere nevnt er z-dynamikken den implementerbare estimatordynamikken. I stabilitetsanalysen benyttes $\hat{m}$-dynamikken:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{m}} &= \dot{z}+k_z\dot{p}\\ &= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c(\hat{m},\omega)p_{01}-p\right)-k_{\tilde{m}}\hat{m}+k_z\frac{a_{01}^2}{V_p}m_t+k_z\frac{a_{01}^2}{V_p}(m-m_t)\\ &= \frac{A_1}{L_c}\left(\hat{\psi}_c(\hat{m},\omega)p_{01}-p\right)+k_{\tilde{m}}(m-\hat{m}) \end{aligned} \tag{7.20}$$

I utledningen av $\hat{m}$-dynamikken ovenfor er det brukt at $k_z = \frac{V_p}{a_{01}^2} k_{\tilde{m}}$.
Massestrømsdynamikken er gitt ved:

$$\dot{m} = \frac{A_1}{L_c}\left(\psi_c(m,\omega)p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - m) \tag{7.21}$$

Videre er det verdt å merke seg at (7.20) og (7.21) kan blir brukt sammen til å definere det følgende virtuelle system:

$$\dot{x} = \frac{A_1}{L_c}\left(\psi_c(x,\omega)p_{01} - p\right) + k_{\tilde{m}}(m - x) \tag{7.22}$$

Det virtuelle systemet kan skrives som $\dot{x} = f(x,t)$, hvor ω,ψ_v, p og m betraktes som tidsvarierende funksjoner. Ut i fra (7.22) kan det sees at hvis $x = m$ får man massestrømsdynamikken, og hvis $x = \hat{m}$ får man estimatordynamikken. Fra ligning (6.10) er kravet for at systemet skal være i en kontraherende region:

$$\beta > 0, \forall x, \forall t \geq 0, \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}^T\right) \leq -\beta I < 0$$

Det betyr at:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}^T\right) \leq -\beta < 0 \tag{7.23}$$

Den partiellderiverte til dynamikken til det virtuelle systemet er:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}^T = \frac{A_1}{L_c}\frac{\partial \psi_c\left(x,\omega\right)}{\partial x} - k_{\tilde{m}} \tag{7.24}$$

Setter inn (7.23) i (7.24) og får:

$$\frac{A_1}{L_c}\frac{\partial \psi_c\left(x,\omega\right)}{\partial x}p_{01} - k_{\tilde{m}} \leq -\beta < 0 \tag{7.25}$$

For at ulikhet (7.25) skal være innfridd må $k_{\tilde{m}} > \frac{A_1}{L_c}\sup(\frac{\partial \psi_c(x,\omega)}{\partial x})p_{01} + \beta$, hvor $\beta > 0$. Da er estimatoren globalt kontraherende og $\hat{m}$ konvergerer eksponentielt mot m.

7.3 Full state tilstandsestimator

I kapittel 5 bruker tilstandsestimatorene en tredjeordens funksjon som tilnærming av kompressorkarakteristikken. Kompressorkarakteristikken blir med andre ord regnet for å være en kjent funksjon. Siden kompressorkarakteristikken ikke alltid er kjent eller at det ikke er sikkert at den kan endres under drift.er det hensiktsmessig å erstatte kompressorkarakteristikken med en måling av utløpstrykket til kompressoren. I [4] ble det designet to modifiserte massestrømsestimatorer, en for regulering med med tettkoblet ventil og en for regulering med drivmoment. Disse ble basert på to massestrømsestimatorer i [3], henholdsvis massestrømsestimator for regulering med tettkoblet ventil og massestrømsestimator for regulering med drivmoment, som ble presentert i kapittel 5. Begge estimatorene i [4] benytter seg av måling av utløpstrykket i stedet for kompressorkarakteristikk. Stabilitetsanalysen i [4] viser at begge de modifiserte massestrømsestimatorene er eksponentielt stabile.For mer inngående informasjon om de modifiserte massestrømsestimatorene henvises leseren til [4].
Kompressorkarakteristikken ble i kapittel 2 definert som:

$$\psi_c\left(m,\omega\right) = \frac{p_2\left(m,\omega\right)}{p_{01}}$$

I dette delkapittelet vil det bli designet en full state tilstandsestimator for hver av reguleringsstrategiene presentert i kapittel 4. Kompressorkarakteristikken vil bli erstattet av en måling av kompressorens utløpstrykk. Det vil si at målingen p_2 brukes i estimatordynamikken på bekostning av utrykket $\psi_c\left(m,\omega\right)p_{01}$ i både. Kontraksjonsanalysen i kapittel 7.3.1 og kapittel 7.3.2 vil vise at begge tilstandsestimatorene er inkrementelt globalt ekponentielt stabile.

7.3.1 Full state tilstandsestimator for regulering med tettkoblet ventil

Ved kontraksjonanalyse kreves også at verdier er kontinuerlige og glatte, derfor tilnærmes $|m| \approx \tanh(\frac{m}{\delta})m$, $sign(p-p_{01}) \approx \tanh(\frac{p-p_{01}}{\delta})$ og $|p-p_{01}| = \tanh(\frac{p-p_{01}}{\delta})\left(p-p_{01}\right)$. I tillegg antas δ å være en konstant som ligger i intervallet $0 < \delta \leq 1$. Det fører til at den fysiske modellen blir seende slik ut:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - k_t \tanh(\frac{p-p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{p-p_{01}}{\delta})\left(p-p_{01}\right)}) \\
&\quad + k_{\tilde{p}}(p-p) &(7.26)\\
\dot{m} &= \frac{A_1}{L_c}(p_2 - \psi_v p_{01} - p) + k_{\tilde{m}}(m-m) &(7.27)\\
\dot{\omega} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{m}{\delta})m\omega) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega-\omega) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3-\omega^3) &(7.28)
\end{aligned}$$

Estimatormodellen blir utledet ved å kopiere den fysiske modellen (7.26)-(7.28) og legge til estimatorledd. Estimatormodellen blir da:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{p}} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(\hat{m} - k_t \tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\,(\hat{p}-p_{01})}) \\
&\quad + k_{\tilde{p}}(p - \hat{p}) && (7.29)\\
\dot{\hat{m}} &= \frac{A_1}{L_c}(p_2 - \psi_v p_{01} - \hat{p}) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}) && (7.30)\\
\dot{\hat{\omega}} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{\hat{m}}{\delta})\hat{m}\hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega - \hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3 - \hat{\omega}^3) && (7.31)
\end{aligned}$$

Fordi m ikke tilgjengelig som måling er ikke estimatoren (7.29)-(7.31) implementerbar. Dette løses som i [6] og i kapittel 5 ved å definere variabelen:

$$z = \hat{m} - k_z p \qquad (7.32)$$

Estimatordynamikken blir da:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{p}} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(\hat{m} - k_t \tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\,(\hat{p}-p_{01})}) \\
&\quad + k_{\tilde{p}}(p - \hat{p}) && (7.33)\\
\dot{z} &= \frac{A_1}{L_c}\,(p_2 - \psi_v p_{01} - \hat{p}) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p} m_t && (7.34)\\
\dot{\hat{\omega}} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{\hat{m}}{\delta})\hat{m}\hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega - \hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3 - \hat{\omega}^3) && (7.35)
\end{aligned}$$

Utledningen av (7.34) blir utført som i kapittel 5.2. Som tidligere nevnt er z-dynamikken den implementerbare estimatordynamikken. I stabilitetsanalysen benyttes $\hat{m}$-dynamikken:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{p}} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(\hat{m} - k_t \tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\,(\hat{p}-p_{01})}) \\
&\quad + k_{\tilde{p}}(p - \hat{p}) && (7.36)\\
\dot{\hat{m}} &= \dot{z} + k_z \dot{p} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\,(p_2 - \psi_v p_{01} - p) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p} m_t + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t) \\
&= \frac{A_1}{L_c}\,(p_2 - \psi_v p_{01} - p) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}) && (7.37)\\
\dot{\hat{\omega}} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{\hat{m}}{\delta})\hat{m}\hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega - \hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3 - \hat{\omega}^3) && (7.38)
\end{aligned}$$

(7.33)-(7.35) og (7.36)-(7.38) kan brukes sammen til å definere det følgende virtuelle system:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(x_2 - k_t \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\,(x_1 - p_{01})}) \\ &\quad + k_{\tilde{p}}(p - x_1) \qquad (7.39)\\ \dot{x}_2 &= = \frac{A_1}{L_c}\,(p_2 - \psi_v p_{01} - x_1) + k_{\tilde{m}}(m - x_2) \qquad (7.40)\\ \dot{x}_3 &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{x_2}{\delta})x_2 x_3) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega - x_3) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3 - x_3^3) \qquad (7.41)\end{aligned}$$

Variabelen $x \triangleq [x_1, x_2, x_3]$. Hvis $x = [p, m, \omega]$ får man modellen av kompressorsystemet, og hvis $x = [\hat{p}, \hat{m}, \hat{\omega}]$ får man estimatordynamikken. Det virtuelle systemet kan skrives som $\dot{x} = f\,(x, p, m, \omega, \psi_v, \tau_t)$, hvor ω, ψ_v, τ_t, p og m betraktes som tidsvarierende funksjoner. Jacobien til virtuelle systemet er på følgende form:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix},$$

hvor $x = [x_1, x_2, x_3]^T$.De partiell deriverte blir:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= -\Bigg(\Big(\big(1 - \tanh^2(\tfrac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big)\, k_t \sqrt{\tanh(\tfrac{x_1 - p_{01}}{\delta})\,(x_1 - p_{01})}\Big) \\ &\quad + \frac{k_t \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big(\big(1 - \tanh^2(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big)(x_1 - p_{01}) + \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})(x_1 - p_{01})}}\Bigg) - k_{\tilde{p}}\\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}\\ \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} &= 0\\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= -\frac{A_1}{L_c}\\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= -k_{\tilde{m}}\\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} &= 0\\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} &= 0\\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} &= -x_3(\sigma r_2^2 \tanh(\tfrac{x_2}{\delta}) + \sigma r_2^2\left(1 - \tanh^2(\tfrac{x_2}{\delta})\right) x_2)\\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} &= -\sigma r_2^2 \tanh(\tfrac{x_2}{\delta})x_2 - k_{\tilde{\omega}1} - 3k_{\tilde{\omega}2}x_3^2\end{aligned}$$

Det er verdt å nevne at leddet $\frac{k_t \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big(\big(1 - \tanh^2(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big)(x_1 - p_{01}) + \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})(x_1 - p_{01})}}$ fra $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}$ er kontinuerlig i $x_1 = p_{01}$, se Tillegg B. For notasjons skyld skrives utrykkene til de partiellderiverte, som ikke er lik null, som følgende:

$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -a_1(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = a_2(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = -b_1(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -b_2(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} = -c_2(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = -c_3(x_1, x_2, x_3)$

For enkelhets skyld blir jacobienmatrisen kalt $A(x_1, x_2, x_3)$. Det betyr at jacobienmatrisen er

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= A(x_1, x_2, x_3) \\
&= \begin{bmatrix} -a_1(x_1, x_2, x_3) & a_2(x_1, x_2, x_3) & 0 \\ -b_1(x_1, x_2, x_3) & -b_2(x_1, x_2, x_3) & 0 \\ 0 & -c_2(x_1, x_2, x_3) & -c_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \qquad (7.42) \\
\frac{\partial f}{\partial x}^T &= A^T(x_1, x_2, x_3) \\
&= \begin{bmatrix} -a_1(x_1, x_2, x_3) & -b_1(x_1, x_2, x_3) & 0 \\ a_2(x_1, x_2, x_3) & -b_2(x_1, x_2, x_3) & c_2(x_1, x_2, x_3) \\ 0 & 0 & -c_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \qquad (7.43)
\end{aligned}
$$

For at estimatoren skal være globalt kontraherende har man fra kontraksjonsteori følgende krav:

$$
\frac{\partial f}{\partial x}^T M + \dot{M} + M\frac{\partial f}{\partial x} < -2\beta_M M, \qquad (7.44)
$$

hvor $\beta_M > 0$, M er en symmetrisk positiv metrikk med konstanter og $\frac{\partial f}{\partial x} = A(x_1, x_2, x_3)$. Metrikken M blir :

$$
M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}, \qquad (7.45)
$$

hvor m_{11}, m_{22} og m_{33} er positive konstanter som er større enn null.

Bruker (7.44) og får følgende:

$$
\begin{aligned}
&G(x_1, x_2, x_3) = A^T(x_1, x_2, x_3)M + MA(x_1, x_2, x_3) \\
&G(x_1, x_2, x_3) = \left[\begin{matrix} -2a_1(x_1, x_2, x_3)m_{11} & \cdots \\ -b_1(x_1, x_2, x_3)m_{22} + a_2(x_1, x_2, x_3)m_{11} & \cdots \\ 0 & \cdots \end{matrix} \right. \\
&\left. \begin{matrix} \cdots & -b_1(x_1, x_2, x_3)m_{22} + a_2(x_1, x_2, x_3)m_{11} & 0 \\ \cdots & -2b_2(x_1, x_2, x_3)m_{22} & -c_2(x_1, x_2, x_3)m_{33} \\ \cdots & -c_2(x_1, x_2, x_3)m_{33} & -2c_3(x_1, x_2, x_3)m_{33} \end{matrix} \right]
\end{aligned}
$$

For å finne ut om $A^T(x_1,x_2,x_3)M + MA(x_1,x_2,x_3) < -2\beta_M M$ benyttes teorem 9. For enkelhets skyld settes $b_1(x_1,x_2,x_3)m_{22} = a_2(x_1,x_2,x_3)m_{11}$ slik at:

$$G(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} -2a_1(x_1,x_2,x_3)m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -2b_2(x_1,x_2,x_3)m_{22} & -c_2(x_1,x_2,x_3)m_{33} \\ 0 & -c_2(x_1,x_2,x_3)m_{33} & -2c_3(x_1,x_2,x_3)m_{33} \end{bmatrix}$$

Bruk av teorem 9 skaper følgende krav:

1. $-2a_1(x_1,x_2,x_3)m_{11} < 0$
2. $2a_1(x_1,x_2,x_3)m_{11}2b_2(x_1,x_2,x_3)m_{22} > 0$
3. $-2a_1(x_1,x_2,x_3)m_{11}\left(2b_2(x_1,x_2,x_3)m_{22}2c_3(x_1,x_2,x_3)m_{33} - (c_2(x_1,x_2,x_3)m_{33})^2\right) < 0$

For en mer detaljert utledning om kravene se i Tillegg C. Fordi $f(x,p,m,\omega,\psi_v,\tau_t)$ er kontraherende i x vil enhver løsning av systemet konvergere mot hverandre eksponentielt. Det betyr at $x = [p,m,\omega]$ og $x = [\hat{p},\hat{m},\hat{\omega}]$ konvergerer eksponentielt mot hverandre. I Tillegg C blir det vist at estimatoren er *globalt kontraherende* såfremt at :

- $12k_{\tilde{\omega}2}k_{\tilde{m}}m_{22} > \sup\left(m_{33}\left(\sigma r_2^2\tanh(\frac{x_2}{\delta}) + \sigma r_2^2\left(1-\tanh^2(\frac{x_2}{\delta})\right)x_2\right)^2\right)$

7.3.2 Full state tilstandsestimator for regulering med drivmoment

Ved kontraksjonanalyse kreves også at verdier er kontinuerlige og glatte, derfor tilnærmes $|m| \approx \tanh(\frac{m}{\delta})m$, $sign(p-p_{01}) \approx \tanh(\frac{p-p_{01}}{\delta})$ og $|p-p_{01}| = \tanh(\frac{p-p_{01}}{\delta})(p-p_{01})$. I tillegg antas δ å være en konstant som ligger i intervallet $0 < \delta \leq 1$. Det fører til at den fysiske modellen blir seende slik ut:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - k_t\tanh(\frac{p-p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{p-p_{01}}{\delta})(p-p_{01})}) \\ &\quad + k_{\tilde{p}}(p-p) && (7.46) \\ \dot{m} &= \frac{A_1}{L_c}(p_2-p) + k_{\tilde{m}}(m-m) && (7.47) \\ \dot{\omega} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2\tanh(\frac{m}{\delta})m\omega) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega-\omega) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3-\omega^3) && (7.48) \end{aligned}$$

Estimatormodellen blir utledet ved å kopiere den fysiske modellen (7.46)-(7.48) og legge til estimatorledd. Estimatormodellen blir da:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{p}} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(\hat{m} - k_t \tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\,(\hat{p}-p_{01})}) \\
&\quad + k_{\tilde{p}}(p-\hat{p}) && (7.49) \\
\dot{\hat{m}} &= \frac{A_1}{L_c}(p_2 - \hat{p}) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}) && (7.50) \\
\dot{\hat{\omega}} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{\hat{m}}{\delta})\hat{m}\hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega - \hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3 - \hat{\omega}^3) && (7.51)
\end{aligned}$$

Fordi m ikke tilgjengelig som måling er ikke estimatoren (7.49)-(7.51) implementerbar. Dette løses som i [6] og i kapittel 5 ved å definere variabelen:

$$z = \hat{m} - k_z p \quad (7.52)$$

Estimatordynamikken blir da:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{p}} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(\hat{m} - k_t \tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\,(\hat{p}-p_{01})}) \\
&\quad + k_{\tilde{p}}(p-\hat{p}) && (7.53) \\
\dot{z} &= \frac{A_1}{L_c}\,(p_2 - \hat{p}) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p} m_t && (7.54) \\
\dot{\hat{\omega}} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{\hat{m}}{\delta})\hat{m}\hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega - \hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3 - \hat{\omega}^3) && (7.55)
\end{aligned}$$

Utledningen av (7.54) blir utført som i kapittel 5.3. Som tidligere nevnt er z-dynamikken den implementerbare estimatordynamikken. I stabilitetsanalysen benyttes $\hat{m}$-dynamikken:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{p}} &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(\hat{m} - k_t \tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{\hat{p}-p_{01}}{\delta})\,(\hat{p}-p_{01})}) \\
&\quad + k_{\tilde{p}}(p-\hat{p}) && (7.56) \\
\dot{\hat{m}} &= \dot{z} + k_z \dot{p} \\
&= \frac{A_1}{L_c}\,(p_2 - \psi_v p_{01} - p) - k_{\tilde{m}}\hat{m} + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p} m_t + k_z \frac{a_{01}^2}{V_p}(m - m_t) \\
&= \frac{A_1}{L_c}\,(p_2 - \psi_v p_{01} - p) + k_{\tilde{m}}(m - \hat{m}) && (7.57) \\
\dot{\hat{\omega}} &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{\hat{m}}{\delta})\hat{m}\hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega - \hat{\omega}) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3 - \hat{\omega}^3) && (7.58)
\end{aligned}$$

(7.53)-(7.55) og (7.56)-(7.58) kan brukes sammen til å definere det følgende virtuelle system:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{a_{01}^2}{V_p}(x_2 - k_t \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\sqrt{\tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\,(x_1 - p_{01})}) \\
&\quad + k_{\tilde{p}}(p - x_1) \qquad (7.59) \\
\dot{x}_2 &= = \frac{A_1}{L_c}\,(p_2 - x_1) + k_{\tilde{m}}(m - x_2) \qquad (7.60) \\
\dot{x}_3 &= \frac{1}{J}(\tau_t - \sigma r_2^2 \tanh(\frac{x_2}{\delta})x_2 x_3) + k_{\tilde{\omega}1}(\omega - x_3) + k_{\tilde{\omega}2}(\omega^3 - x_3^3) \qquad (7.61)
\end{aligned}
$$

Variabelen $x \triangleq [x_1, x_2, x_3]$. Hvis $x = [p, m, \omega]$ får man modellen av kompressor-systemet, og hvis $x = [\hat{p}, \hat{m}, \hat{\omega}]$ får man estimatordynamikken. Det virtuelle systemet kan skrives som $\dot{x} = f\,(x, p, m, \omega, \tau_t)$, hvor ω, τ_t, p og m betraktes som tidsvarierende funksjoner. Jacobien til virtuelle systemet er på følgende form:

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} \end{bmatrix},
$$

hvor $x = [x_1, x_2, x_3]^T$.De partiell deriverte blir:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= -\Bigg(\Big(\big(1 - \tanh^2(\tfrac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big)\, k_t \sqrt{\tanh(\tfrac{x_1 - p_{01}}{\delta})\,(x_1 - p_{01})}\Big) \\
&\quad + \frac{k_t \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\Big(\big(1 - \tanh^2(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\big)(x_1 - p_{01}) + \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\Big)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})(x_1 - p_{01})}}\Bigg) - k_{\tilde{p}} \\
\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= \frac{a_{01}^2}{V_p} \\
\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= -\frac{A_1}{L_c} \\
\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= -k_{\tilde{m}} \\
\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} &= -x_3(\sigma r_2^2 \tanh(\tfrac{x_2}{\delta}) + \sigma r_2^2 \left(1 - \tanh^2(\tfrac{x_2}{\delta})\right) x_2) \\
\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} &= -\sigma r_2^2 \tanh(\tfrac{x_2}{\delta})x_2 - k_{\tilde{\omega}1} - 3k_{\tilde{\omega}2}x_3^2
\end{aligned}
$$

Det er verdt å nevne at leddet $\frac{k_t \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\left(\left(1 - \tanh^2(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\right)(x_1 - p_{01}) + \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})(x_1 - p_{01})}}$ fra $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}$ er kontinuerlig i $x_1 = p_{01}$, se Tillegg B. For notasjons skyld skrives utrykkene til de partiellderiverte, som ikke er lik null, som følgende:

$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -a_1(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = a_2(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = -b_1(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -b_2(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} = -c_2(x_1, x_2, x_3)$
$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = -c_3(x_1, x_2, x_3)$

For enkelhets skyld blir jacobienmatrisen kalt $A(x_1, x_2, x_3)$. Det betyr at jacobienmatrisen er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= A(x_1, x_2, x_3) \\
&= \begin{bmatrix} -a_1(x_1, x_2, x_3) & a_2(x_1, x_2, x_3) & 0 \\ -b_1(x_1, x_2, x_3) & -b_2(x_1, x_2, x_3) & 0 \\ 0 & -c_2(x_1, x_2, x_3) & -c_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \qquad (7.62) \\
\frac{\partial f}{\partial x}^T &= A^T(x_1, x_2, x_3) \\
&= \begin{bmatrix} -a_1(x_1, x_2, x_3) & -b_1(x_1, x_2, x_3) & 0 \\ a_2(x_1, x_2, x_3) & -b_2(x_1, x_2, x_3) & c_2(x_1, x_2, x_3) \\ 0 & 0 & -c_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \qquad (7.63)
\end{aligned}$$

For at estimatoren skal være globalt kontraherende har man fra kontraksjonsteori følgende krav:

$$\frac{\partial f}{\partial x}^T M + \dot{M} + M\frac{\partial f}{\partial x} < -2\beta_M M, \qquad (7.64)$$

hvor $\beta_M > 0$, M er en symmetrisk positiv metrikk med konstanter og $\frac{\partial f}{\partial x} = A(x_1, x_2, x_3)$. Metrikken M blir :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} \qquad (7.65)$$

hvor m_{11}, m_{22} og m_{33} er positive konstanter som er større enn null.

Bruker (7.64) og får følgende:

$$G(x_1, x_2, x_3) = A^T(x_1, x_2, x_3)M + MA(x_1, x_2, x_3)$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -2a_1(x_1, x_2, x_3)m_{11} & \cdots \\ -b_1(x_1, x_2, x_3)m_{22} + a_2(x_1, x_2, x_3)m_{11} & \cdots \\ 0 & \cdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \cdots & -b_1(x_1, x_2, x_3)m_{22} + a_2(x_1, x_2, x_3)m_{11} & 0 \\ \cdots & -2b_2(x_1, x_2, x_3)m_{22} & -c_2(x_1, x_2, x_3)m_{33} \\ \cdots & -c_2(x_1, x_2, x_3)m_{33} & -2c_3(x_1, x_2, x_3)m_{33} \end{matrix} \Bigg]$$

For å finne ut om $A^T(x_1,x_2,x_3)\,M + MA(x_1,x_2,x_3) < -2\beta_M M$ benyttes teorem 9. For enkelhets skyld settes $b_1(x_1,x_2,x_3)\,m_{22} = a_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{11}$ slik at:

$$G(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} -2a_1(x_1,x_2,x_3)\,m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -2b_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{22} & -c_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{33} \\ 0 & -c_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{33} & -2c_3(x_1,x_2,x_3)\,m_{33} \end{bmatrix}$$

Bruk av teorem 9 skaper følgende krav:

1. $-2a_1(x_1,x_2,x_3)\,m_{11} < 0$
2. $2a_1(x_1,x_2,x_3)\,m_{11}2b_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{22} > 0$
3. $-2a_1(x_1,x_2,x_3)\,m_{11}\left(2b_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{22}2c_3(x_1,x_2,x_3)\,m_{33} - (c_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{33})^2\right) < 0$

For en mer detaljert utledning om kravene se i Tillegg C. Fordi $f(x,p,m,\omega,\psi_v,\tau_t)$ er kontraherende i x vil enhver løsning av systemet konvergere mot hverandre eksponentielt. Det betyr at $x = [p,m,\omega]$ og $x = [\hat{p},\hat{m},\hat{\omega}]$ konvergerer eksponentielt mot hverandre. I Tillegg C blir det vist at estimatoren er *globalt kontraherende* såfremt at :

- $12k_{\tilde{\omega}2}k_{\tilde{m}}m_{22} > \sup\left(m_{33}\left(\sigma r_2^2\tanh(\frac{x_2}{\delta}) + \sigma r_2^2\left(1-\tanh^2(\frac{x_2}{\delta})\right)x_2\right)^2\right)$

Kapittel 8

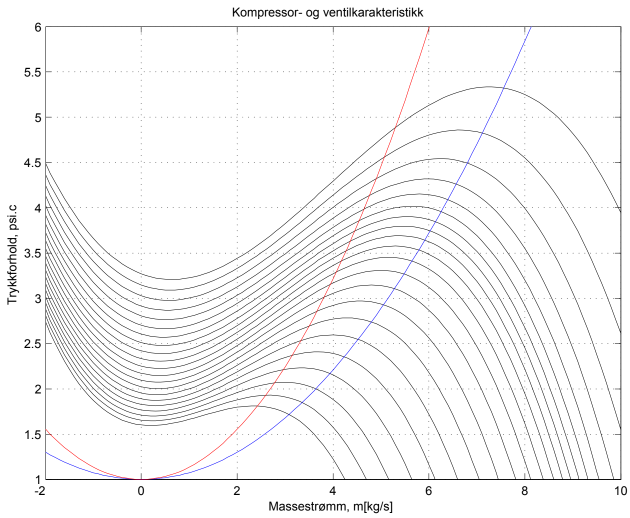
Simuleringer

I dette kapittelet vil det bli utført simuleringer på kompressorsystemet som ble presentert i kapittel 7, med regulatorene og estimatorene fra henholdsvis kapittel 4 og kapittel 7. I simuleringene vil en modifisert simulinkmodell fra [3] benyttes, og en 3. ordens tilnærming av kompressorkarakteristikken fra [5]. Som i [3] er parametrene valgt til:

$$
\begin{array}{ll}
A_1 = 0.0414 & [m^2] \\
a_{01} = 347 & [\frac{m}{s}] \\
V_p = 0.03125 & [m^3] \\
L_c = 50 & [m] \\
J = 60 & [kgm^2] \\
p_{01} = 10^5 & [Pa] \\
\sigma = 0.9 & \\
r_2 = 0.178 & [m]
\end{array}
$$

Kompressorsystemet blir først simulert uten surgeregulering for å vise at modellen kan simulere surge. Deretter vil de to reguleringsstrategiene bli simulert med målte verdier av massestrømmen, og med de tilhørende estimatorene i åpen sløyfe. Estimatorene skal så utsettes for hvit støy og stasjonær støy for å teste deres robusthet. Videre vil de to reguleringsstrategiene simuleres med estimerte verdier som har eksakte målinger tilgjengelig. Til slutt testes systemets robusthet ved å benytte støybefengte målinger.

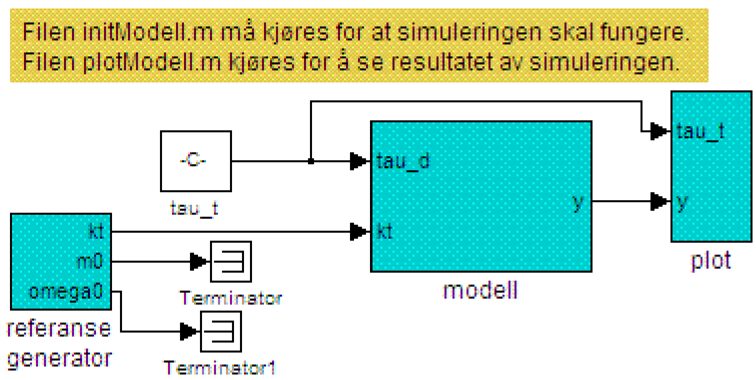
Simuleringene blir utført slik at kompressorsystemet først opererer i et stabilt likevektspunkt. Etter halve simuleringstiden endres åpningen på strupeventilen slik at likevektspunktet drives til venstre til et ustabilt likevektspunkt, se figur 8.1. Ventilåpningen forandres ved et sprang på k_t. Ved det stabile likevektspunktet er $k_t = 0.0115$, for å bli endret til $k_t = 0.0085$ når likevektspunktet er ustabilt. Endringen av ventilåpningen filtreres gjennom et førsteordens filter med tidskonstant $T = 1$ for å gjenskape en virkelig forandring. Likevektspunktene til



Figur 8.1: Stabile og ustabile likevektspunkter

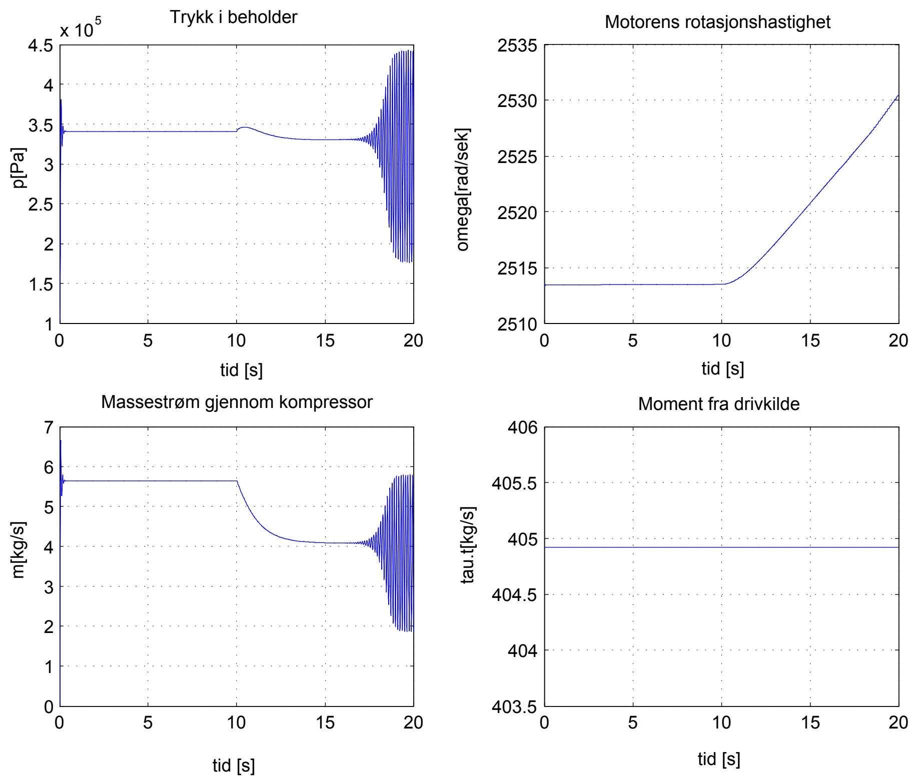
de to ventilåpningene er henholdsvis $m_{01} = 5.65$ og $m_{01} = 4.03$. Ønsket rotasjonshastighet er $N = 400[\frac{omdr}{s}]$ som tilsvarer vinkelhastigheten $\omega = 2513.3[\frac{rad}{s}]$.

8.1 Simulering av surge



Figur 8.2: Simulinkdiagramm for simulering av surge.

Modellen i figur 8.2 simuleres uten surgeregulering for å vise at den kan simulere surge. Figur 8.3 viser at kompressorsystemet først arbeider i det stabile området. Etter $t = 10$ s drives likevektspunktet over til et ustabilt likevektspunkt, og figur 8.3 viser at det oppstår svingninger i plenumstrykket og i massestrømmen gjennom kompressoren. Simuleringen foretas med $\tau_t = 405\ Nm$.

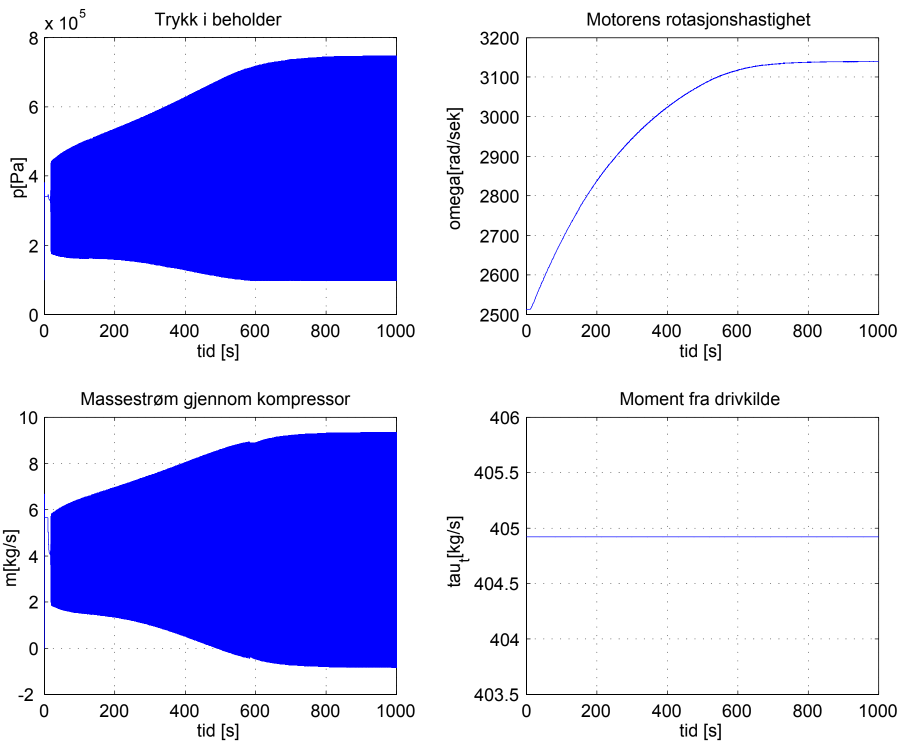


Figur 8.3: Tilstandsforløp med stabilt og ustabilt likevektspunkt simulert over t=20s

Hvis det simuleres over en lengre periode vil rotasjonshastigheten konvergere mot en gitt verdi og de stående svingningene i p og m vil øke med økende ω, se figur 8.4.

8.2 Full state estimator for regulering med tettkoblet ventil

Simuleringen av regulering med tettkoblet ventil utføres som tidligere nevnt i kapittel 8. Simuleringene foregår over en periode på 20 sekunder, hvor k_t endres fra $k_t = 0.0115$ til $k_t = 0.0085$ etter $t = 10\ s$. I simuleringene benyttes en Euler integrator med fast tastetid $T = 0.005\ s$. Regulatorparametrene er satt til $k_v = 0.2$, $k_p = 60$ og $k_i = 7$. Estimator forsterkningene er satt til $k_{\tilde{m}} = 33.12$, $k_{\tilde{p}} = 10$, $k_{\tilde{\omega}1} = 10$ og $k_{\tilde{\omega}2} = 0.000001$. Figur 8.5 viser simulinkdiagrammet som ble brukt for simuleringen.



Figur 8.4: Tilstander for stabilt og ustabilt likevektspunkt simulert over t=1000s

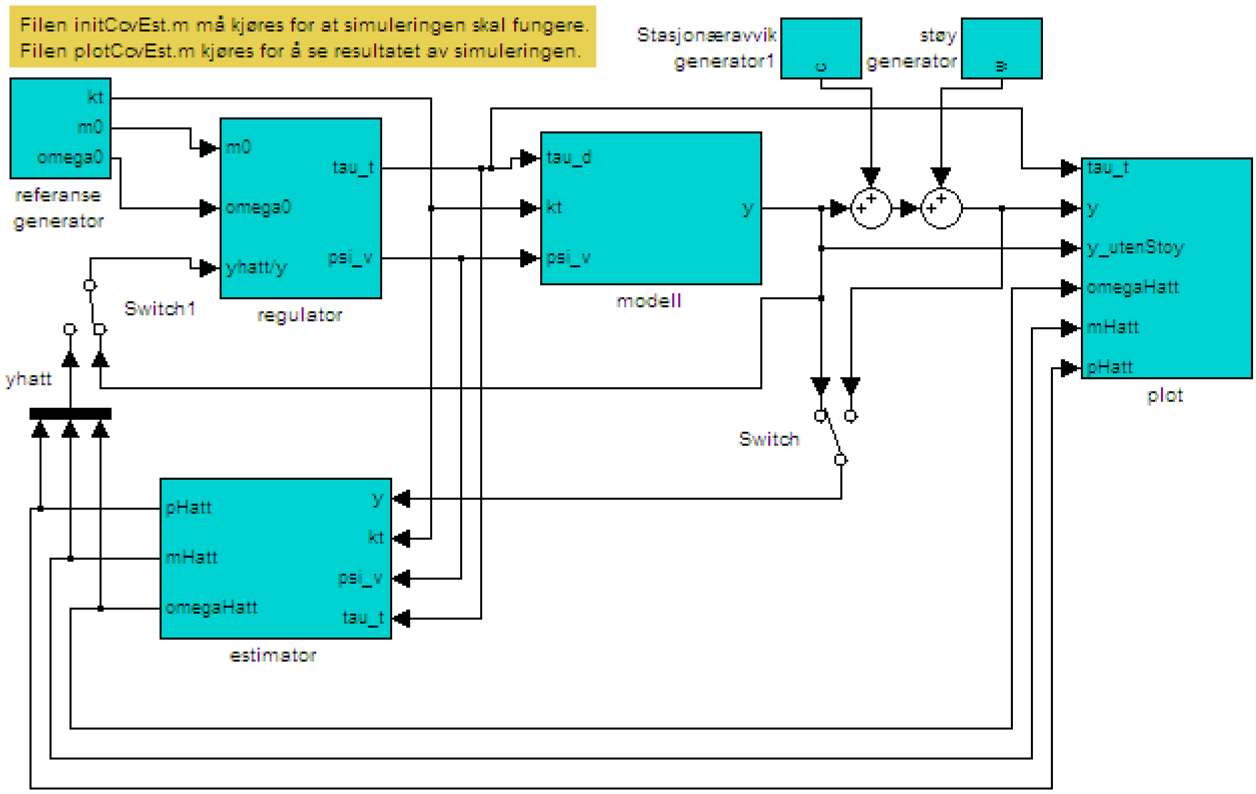
8.2.1 Målte tilstander

Først skal det undersøkes hvordan estimatoren oppfører seg uten støy i åpen sløyfe. Åpen sløyfe uten støy innebærer at bryteren "Switch1" står i en slik posisjon at regulatoren tar inn målte tilstander og bryteren "Switch" står i en posisjon hvor estimatoren tar inn målinger uten støy. Figur 8.6 viser tilstandsforløpet til systemet.

Av figur 8.7 framkommer det tydelig at estimatoravviket raskt svinger seg inn til null i avvik for alle tre tilstander. Dette bekrefter resultatene fra stabilitetsanalysen i kapittel 7.

8.2.2 Målte tilstander med støy

For å få mer realistiske simuleringer er det nødvendig å påvirke målingene av kompressorsystemets tilstander med støy. Siden det er estimatorens robusthet som skal testes benyttes tilstandene uten støy inn til regulatoren. Systemet blir kjørt med tre ulike støyscenarioer. Først vil estimatoren bli utsatt for stasjonær støy på $(1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa])$ på p_2, $(1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa])$ på p og $(125.65\,\left[\frac{rad}{s}\right])$ på ω. Den stasjonære støyen er et positivt stasjonæravvik tilsvarende 5% av amplituden til

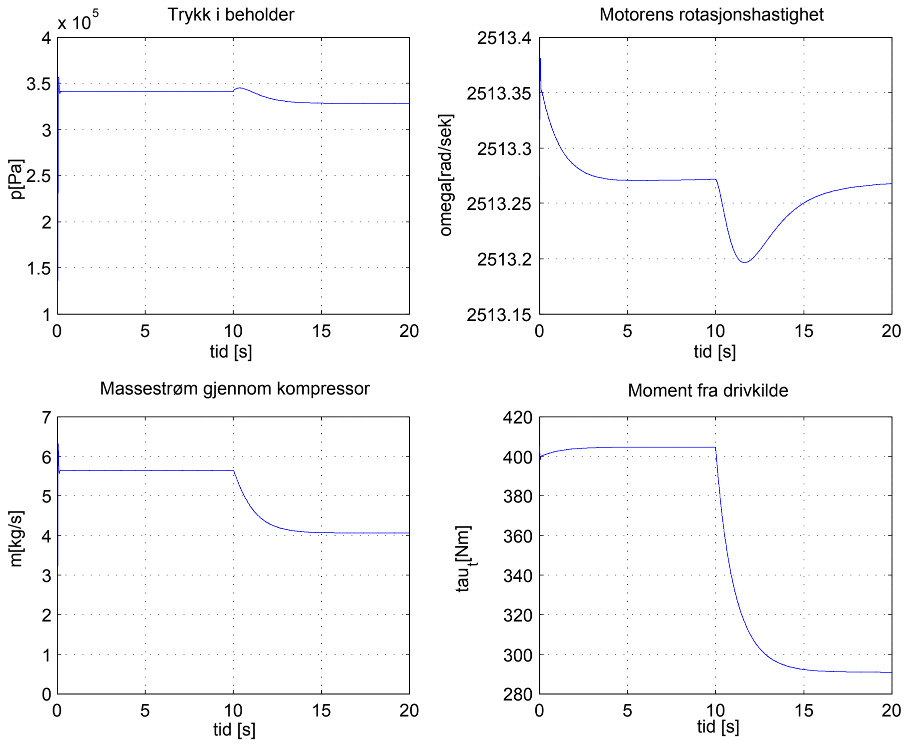


Figur 8.5: Simulinkdiagram for regulering med tettkoblet ventil.

de respektive tilstander. Deretter vil de samme målingene utsettes for hvit støy med middelverdi null og amplitude på $\pm 10\%$ av måleverdien. For p blir dette $(\pm 3.5 \cdot 10^4\,[Pa])$, for p_2 blir dette $(\pm 3.5 \cdot 10^4\,[Pa])$og for ω blir dette $(\pm 251.2\,\left[\frac{rad}{s}\right])$. Deretter vil estimatoren utsettes for hvit støy og stasjonærstøy. Det vil for hver simulering også bli satt opp en figur med avvik mellom tilstander ute støy og estimerte tilstander med støy og en figur med avvik mellom tilstander med støy og estimerte tilstander med støy. Når estimatoren skal utsettes for støy kreves det også at bryteren "Switch" i figur 8.5 endrer posisjon slik at estimatoren tar inn støybefengte målinger.

Målte tilstander med stasjonærstøy

I denne simuleringen blir p_2, p, og ω utsatt for et positivt stasjonæravvik tilsvarende 5% av amplituden til de respektive tilstander. Det innebærer at p_2, p, og ω vil få påført et stasjonæravvik på henholdsvis $(1.75 \cdot 10\hat{~}4\,[Pa])$, $(1.75 \cdot 10\hat{~}4\,[Pa])$ og $(125.65\,\left[\frac{rad}{s}\right])$. m blir ikke påført støy fordi m ikke er målbar. I simulink-diagrammet 8.5 kan det sees hvordan støyen kobles på. Den ene boksen i figur



Figur 8.6: Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp ved simulering med målte tilstander på regulatorinngang.

8.5 er for stasjonærstøy og den andre for hvit støy. Kun boksen for stasjonærstøy er i bruk i denne simuleringen.

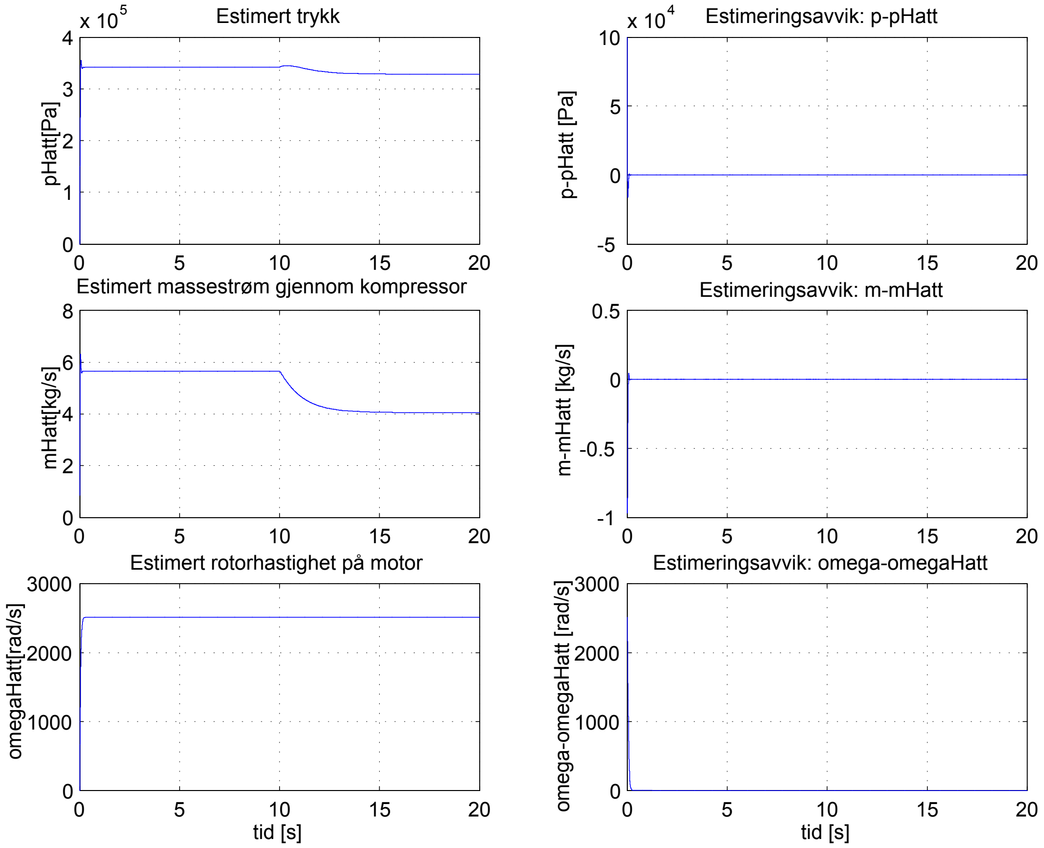
Avviket mellom målinger med støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.10 og figur 8.11 leses av til å være:

$-1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$	for $p - \hat{p}$
$-0.44\,[\frac{kg}{s}]$	for $m - \hat{m}$
$0[\frac{rad}{s}]$	for $\omega - \hat{\omega}$

Videre leses avviket mellom målinger uten støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.8 og figur 8.9 til å være:

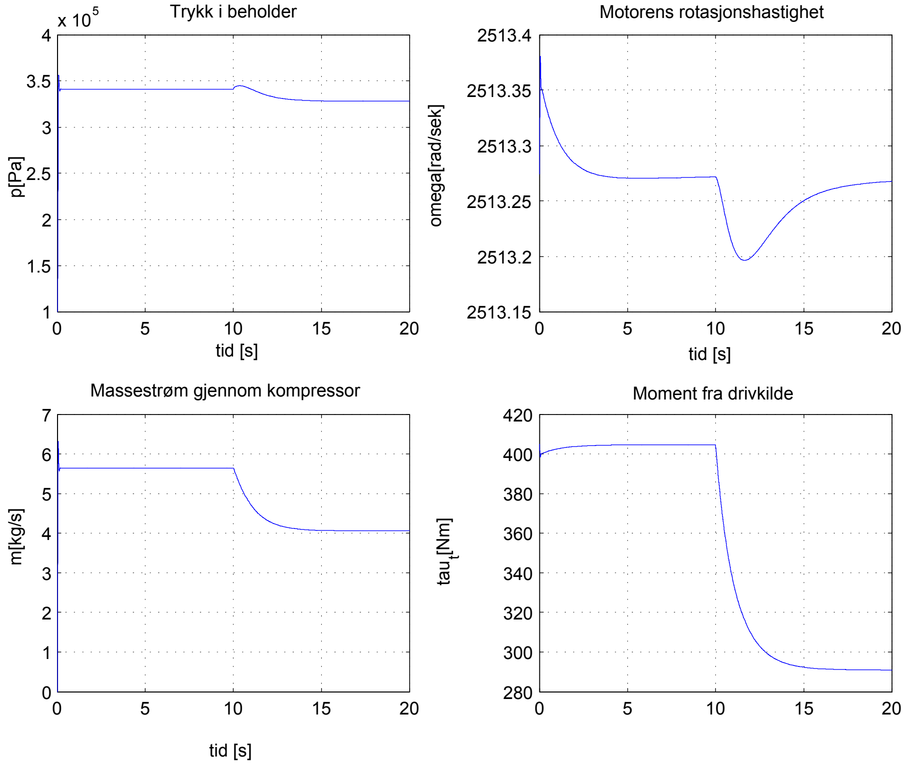
$-3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$	for $p - \hat{p}$
$-0.44\,[\frac{kg}{s}]$	for $m - \hat{m}$
$-125.7[\frac{rad}{s}]$	for $\omega - \hat{\omega}$

Figur 8.9, hvor målingene ikke er påvirket av støy, avslører at estimatoren ikke filtrerer bort stasjonæravviket i noen av tilstandene. $\hat{m}$ får med seg deler av



Figur 8.7: Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik.

stasjonæravviket til p_2, p, $\hat{p}$ og ω, mens målt m er ikke påvirket av støy i det hele tatt. Grafene til $m - \hat{m}$ er lik i figur 8.11 og i figur 8.9. Årsaken til dette er at m ikke er påvirket av støy. Ved $t = 10s$ endres ventilåpningen. Det endrer stasjonæravviket i $m - \hat{m}$ endrer seg fra $-0.44\left[\frac{kg}{s}\right]$ til $-0.29\left[\frac{kg}{s}\right]$. Dette skjer fordi "støybidraget" fra $\hat{p}$ minker da det inntreffer et trykkfall forårsaket av endringen av ventilåpning. Stasjonæravviket mellom p med støy og $\hat{p}$ med støy er på $-1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$. Stasjonæravviket mellom p uten støy og $\hat{p}$ med støy er på $-3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$. Det blir også gjort et hopp i stasjonæravviket ved $t = 10s$ i grafen for $p-\hat{p}$ i figur 8.11, fra $-1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$ til $-1.2 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$, som inntreffer siden $\hat{p}$ lar seg påvirke av det reduserte støybidraget fra $\hat{m}$. Naturligvis inntreffer tilsvarende endringer på $0.7 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$ ved $t = 10s$ i avviket mellom p uten støy og $\hat{p}$ med støy. Forskjellen mellom ω uten støy og $\hat{\omega}$ med støy er $-125.7[\frac{rad}{s}]$.



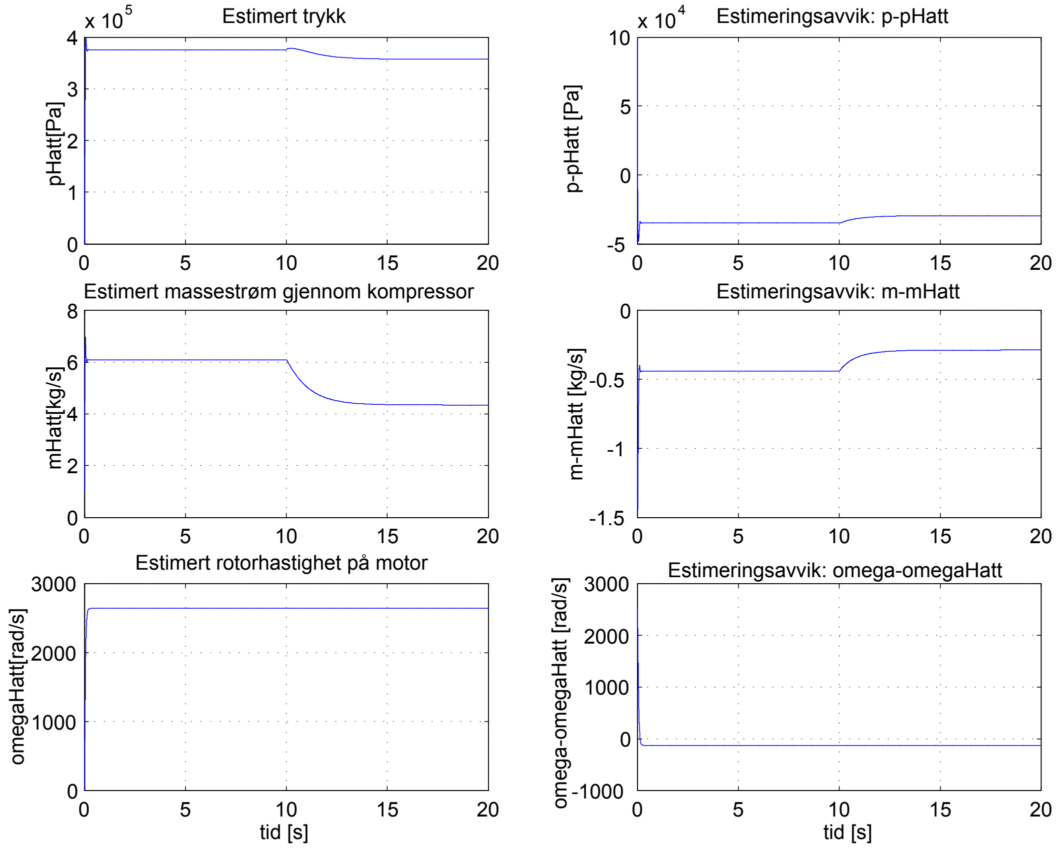
Figur 8.8: Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp upåvirket av støy.

Målte tilstander med hvit støy

I denne simuleringen benyttes simulinkdiagrammet i figur 8.5. Siden estimatoren skal testes for robusthet i forhold til hvit støy er boksen med stasjonærstøy er slått av og boksen med hvit støy er slått på. Hvilke målinger støyen påvirker og amplituden til støyen er nevnt i kapittel 8.2.2. Figur 8.12 og figur 8.14 viser tilstandsforløpet med og uten hvit støy.

Årsaken til de store avvikene i figur 8.15 med støy på estimerte tilstandene og målte tilstander er at utslagene fra hver av de støyinfiserte målingene blir i verste fall summert med utslagene til hver av de estimerte tilstandene. I verste fall vil støyen på målingene og støyen på de estimerte tilstandene bli addert når avvikene mellom estimert og målt tilstand beregnes.

Likevel er utslaget nokså lite når estimert tilstander med støy sammenlignes med måling uten støy. Mens den hvite støyen som pøses på målingene p, ω, og p_2 er henholdsvis $(\pm 3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa])$, $(\pm 251.3\,\left[\frac{rad}{s}\right])$ og $(\pm 3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa])$, kan avviket mellom målinger med støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.15, med hvit støy på estimerte og målte tilstander, leses av til å være:



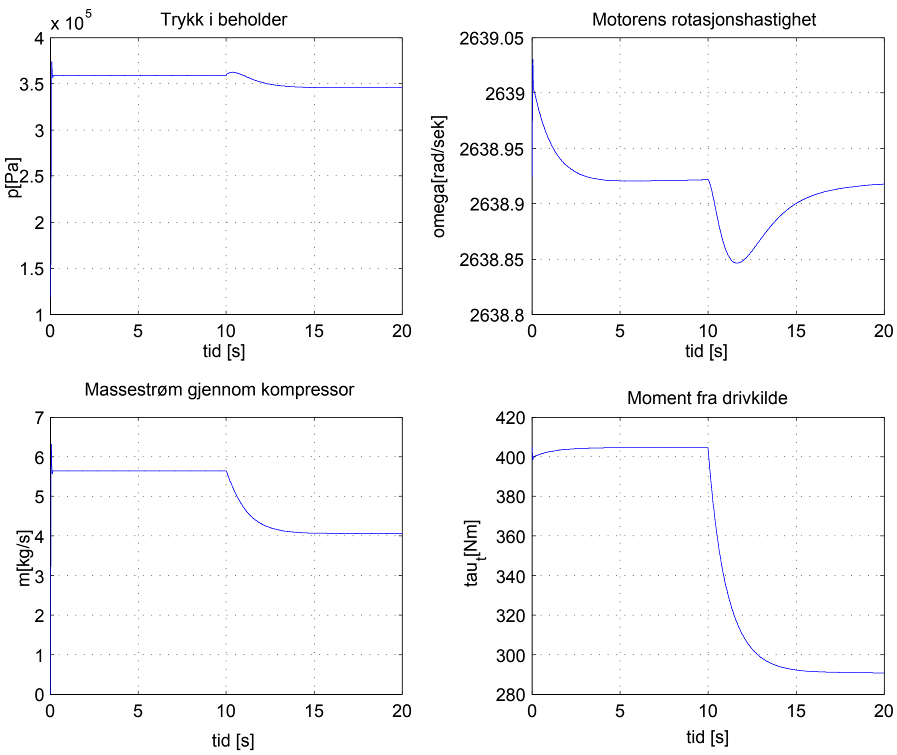
Figur 8.9: Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av støy. Estimerte tilstander er påvirket av støy.

$$
\begin{array}{ll}
\pm 5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
\pm 0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
\pm 250[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}
\end{array}
$$

Videre leses avviket mellom målinger uten hvit støy og estimerte tilstander med hvit støy fra figur 8.13 til å være:

$$
\begin{array}{ll}
\pm 1.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
\pm 0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
\pm 30[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}
\end{array}
$$

Årsaken til at forskjellen mellom m og $\hat{m}$ er lik uavhengig om målingene er med eller uten støy er at m ikke måles og er derfor ikke belastet med støy. Det betyr at i figur 8.13 og figur 8.15 er grafene med $m - \hat{m}$ (notasjonen på figurene er m-mhatt) identiske.



Figur 8.10: Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp med påvirkning av støy.

Målte tilstander med hvit støy og stasjonær støy

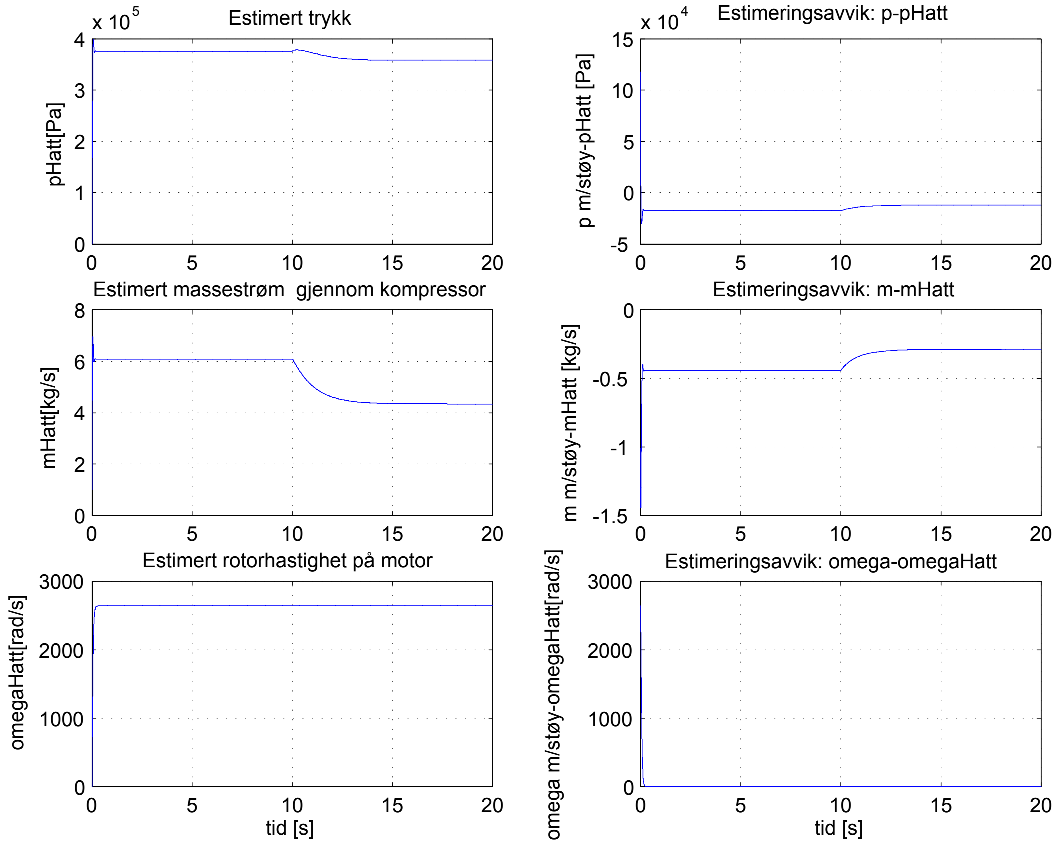
I denne simuleringen er både boksen med stasjonærstøy og boksen med hvit støy aktiv fra simulerinkdiagrammet i figur 8.5. Figur 8.16 og figur 8.18 viser tilstandsforløpet med og uten hvit støy og stasjonærstøy.

I dette tilfellet legger den hvite støyen seg oppå stasjonærstøyen. Stasjonæravviket mellom målinger med støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.19 og leses av til å være:

$$
\begin{array}{ll}
-1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
-0.44\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
0[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}
\end{array}
$$

Og stasjonæravviket mellom målinger uten støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.17 til å være:

$$
\begin{array}{ll}
-3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
-0.44\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
-125.7[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}
\end{array}
$$



Figur 8.11: Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy.

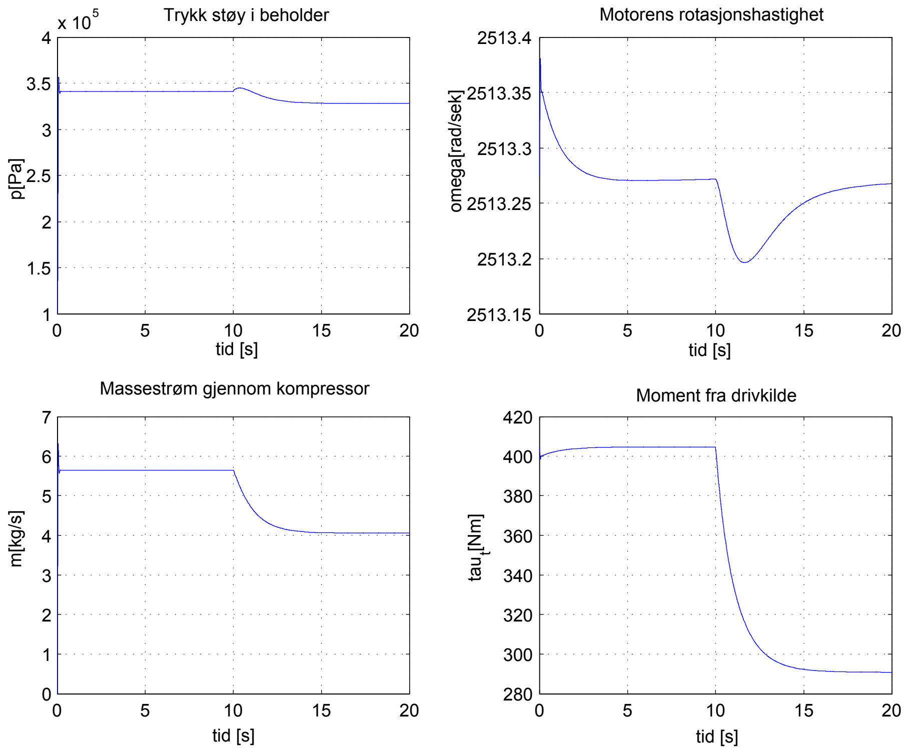
Som tidligere nevnt legger den hvite støyen seg oppå stasjonærstøyen, slik at avviket mellom målinger med støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.19 leses av til å være:

$$
\begin{array}{ll}
\pm 5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
\pm 0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
\pm 250[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega},
\end{array}
$$

med stasjonæravviket som middelverdi. Videre leses avviket mellom målinger uten støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.17 til å være:

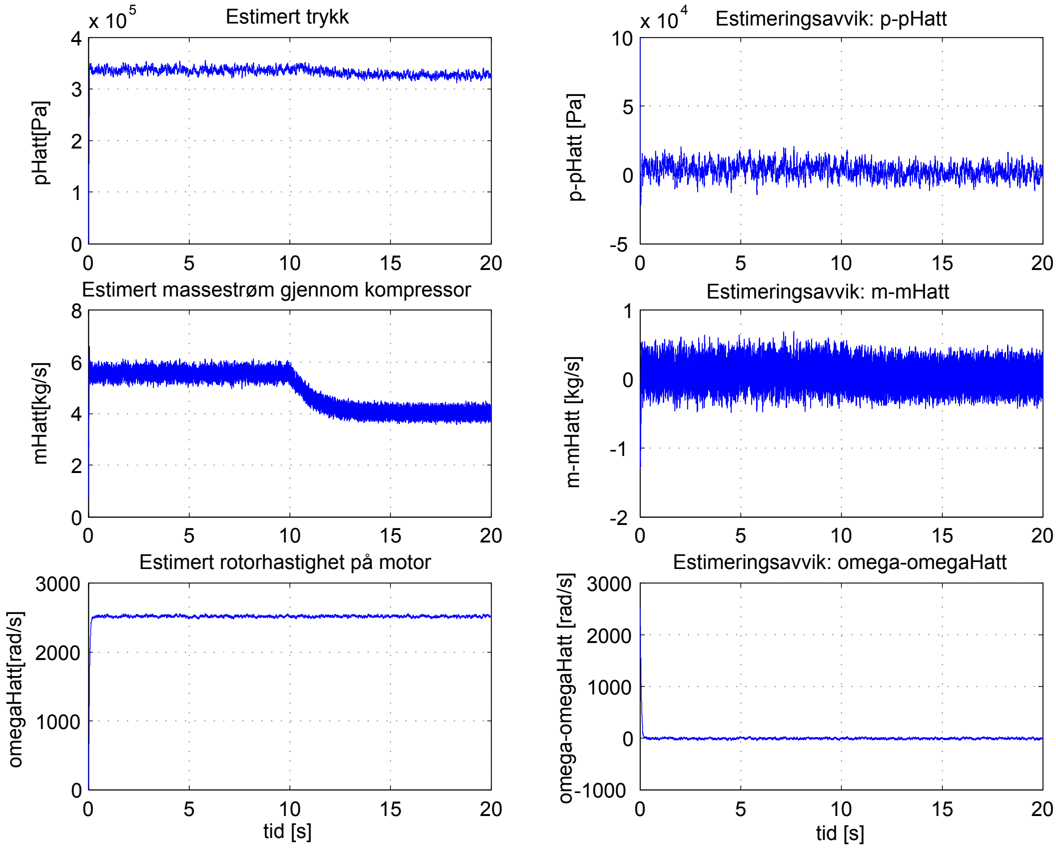
$$
\begin{array}{ll}
\pm 1.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
\pm 0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
\pm 30[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega},
\end{array}
$$

med stasjonæravviket som middelverdi. Det samme mønsteret som observeres i

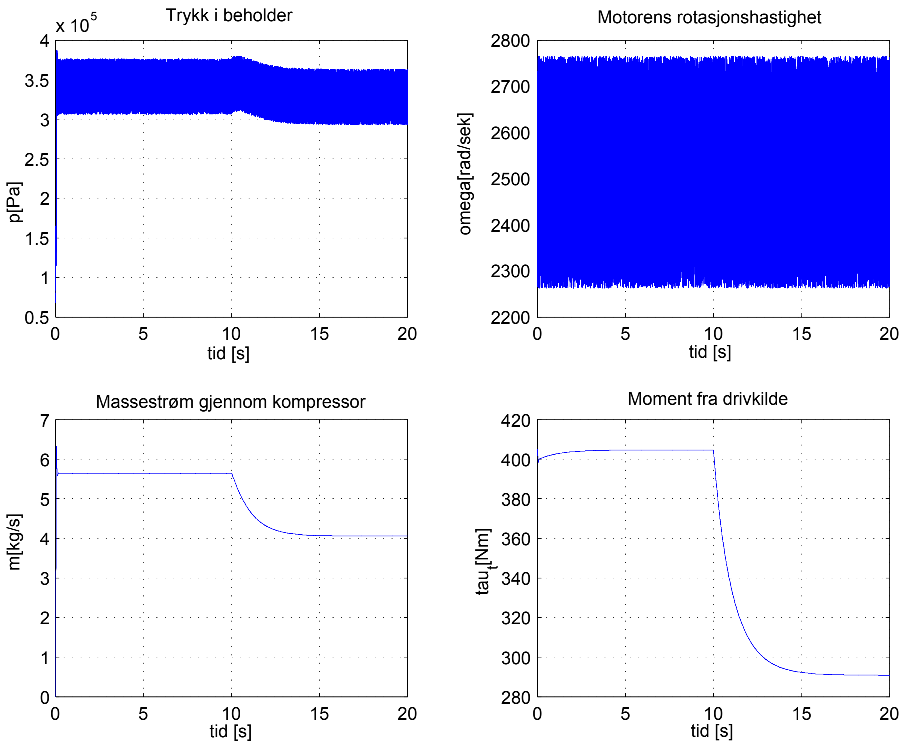


Figur 8.12: Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp uten påvirkning av hvit støy.

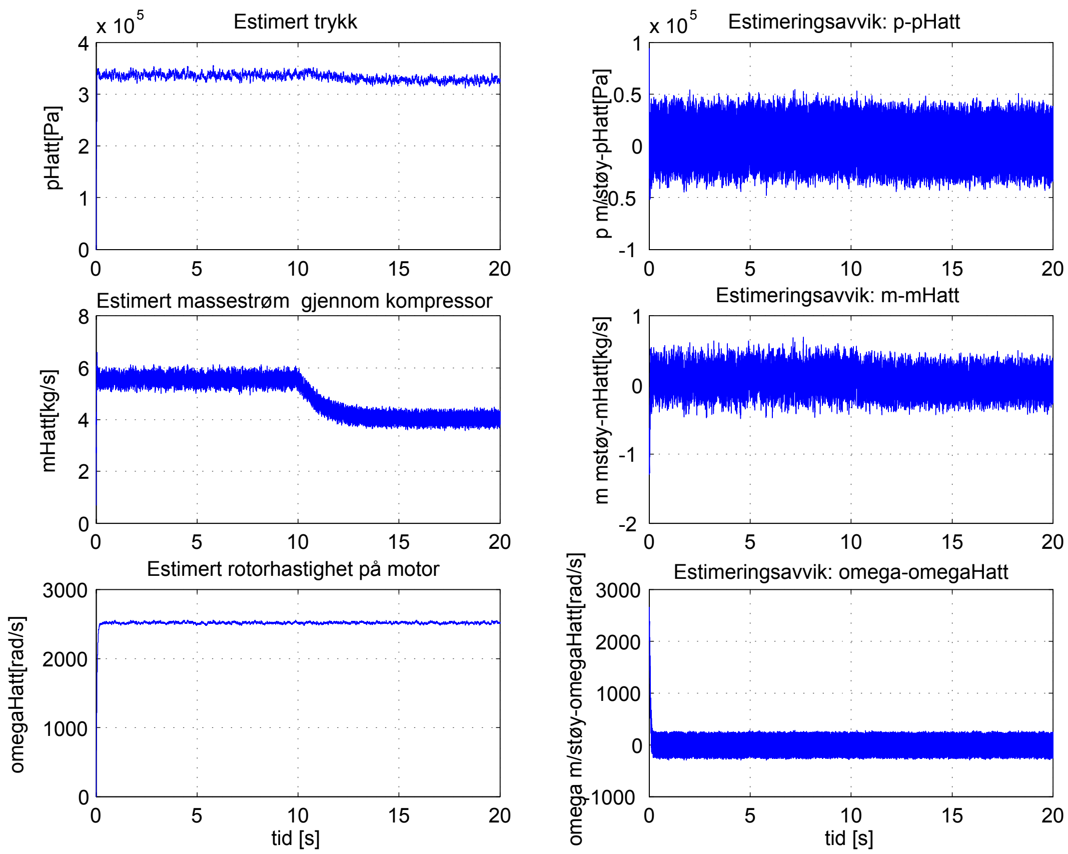
simuleringene med bare stasjonærstøy og med bare hvit støy gjentar seg. Det vil si at estimatoren klarer ikke å eliminere stasjonæravviket og har en viss evne til å filtrere bort deler av den hvite støyen.



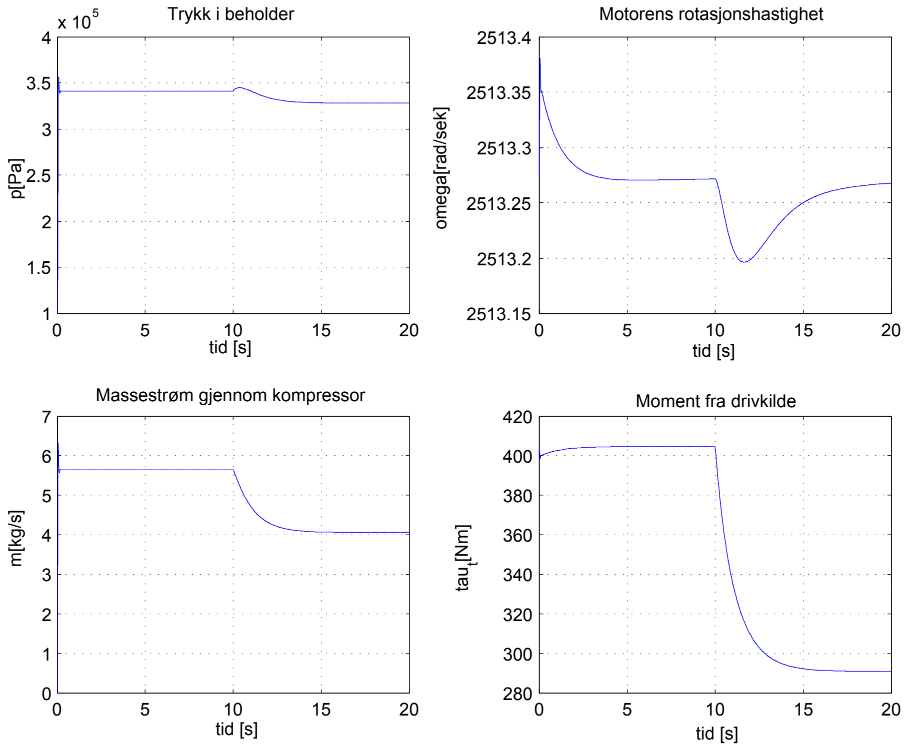
Figur 8.13: Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy.



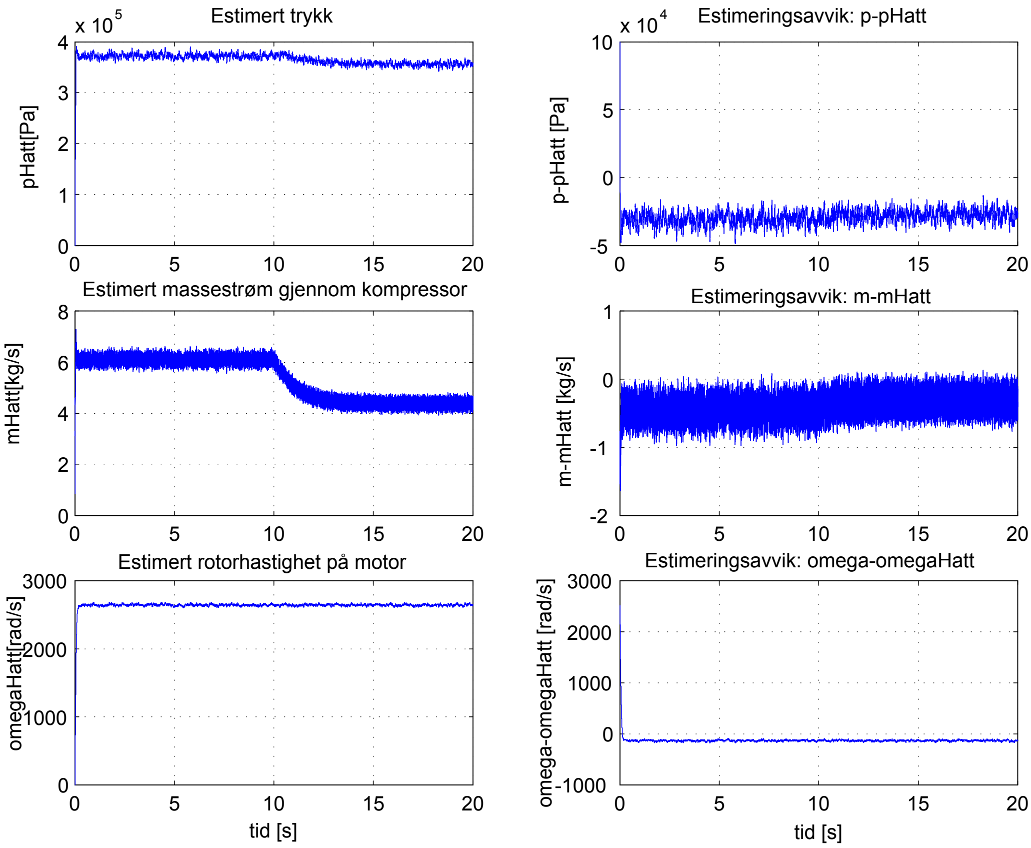
Figur 8.14: Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp med påvirkning av hvit støy.



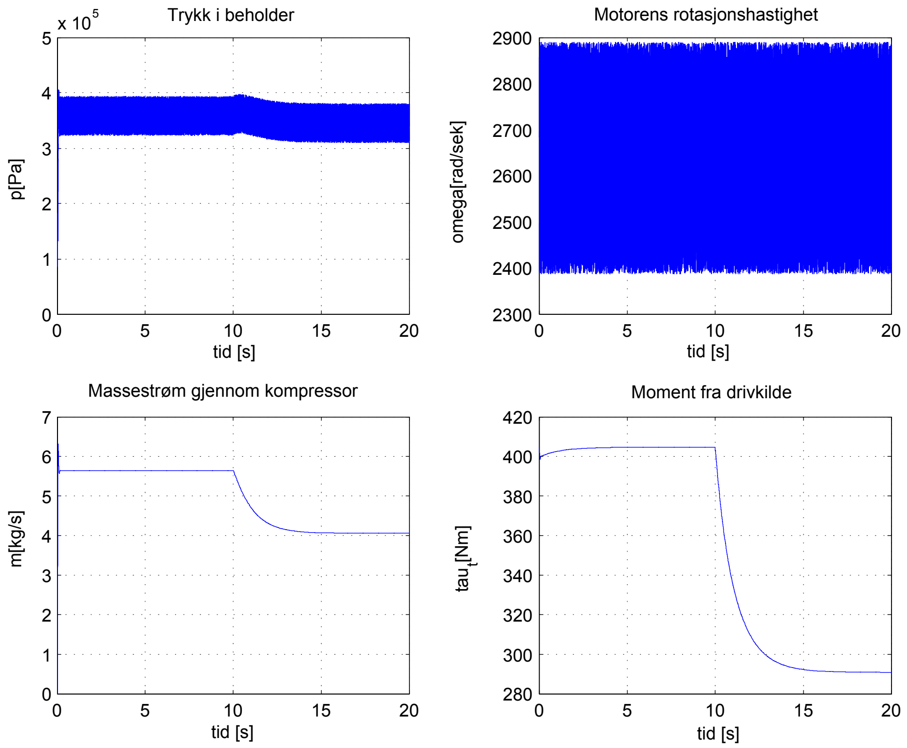
Figur 8.15: Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy.



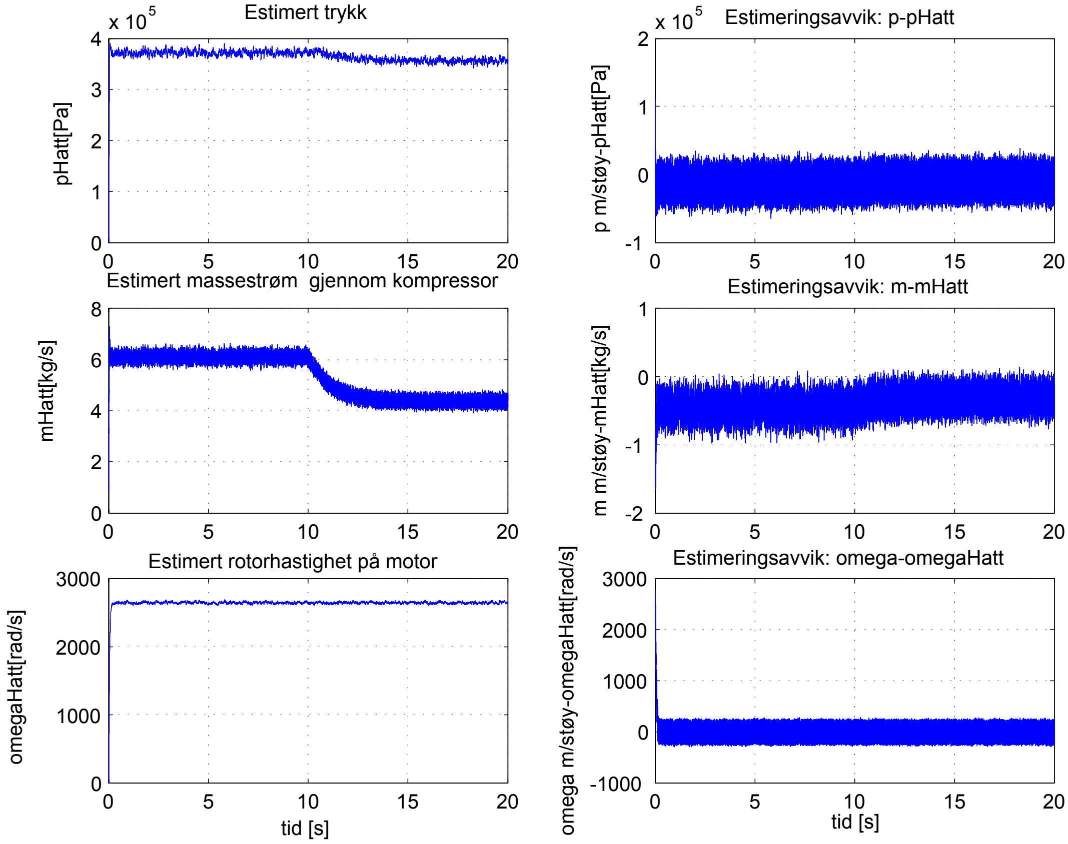
Figur 8.16: Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp uten påvirkning av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.17: Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy.



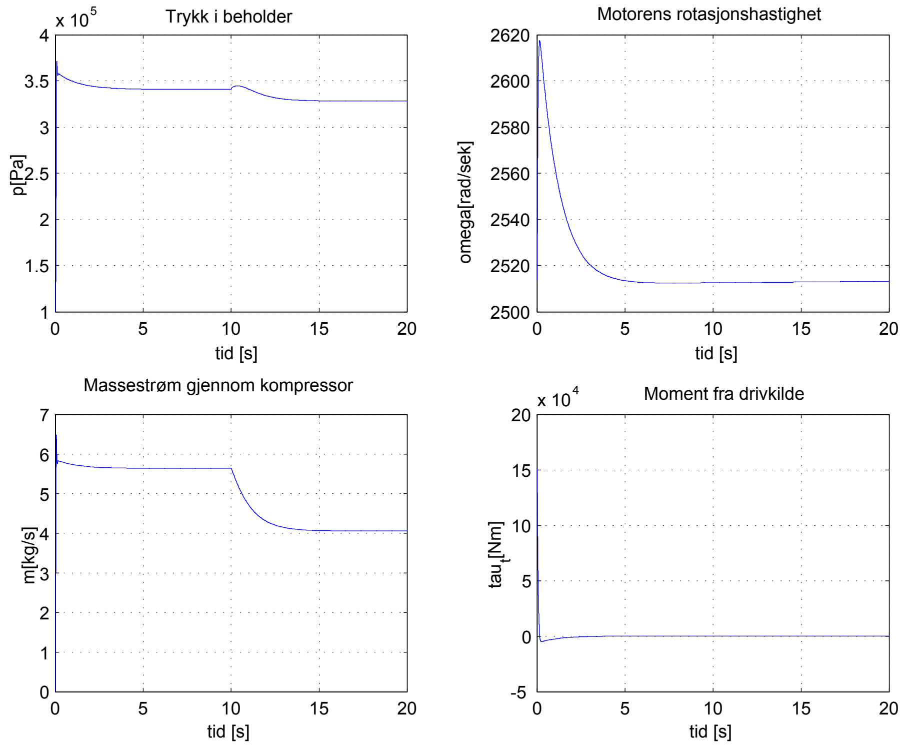
Figur 8.18: Simulering med tettkoblet ventil: Tilstandsforløp med påvirkning av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.19: Simulering med tettkoblet ventil: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy.

8.2.3 Estimerte tilstander

I denne delen av simuleringene kobles estimatoren, regulatoren og modellen sammen med slik at det blir en lukket sløyfe. Dette innebærer at regulatoren tar inn de estimerte tilstandene $\hat{\omega}$ og $\hat{m}$ i stedet for ω og m. Dette kan sees ut i fra simulinkdiagrammet på figur 8.5, hvor bryteren "Switch1" settes i en posisjon slik at regulatoren tar inn estimerte tilstander. Bryteren "Switch" avgjør hvorvidt estimatoren tar inn støybefengte målinger eller målinger uten støy. Figur 8.20 viser tilstandsforløpet til systemet.

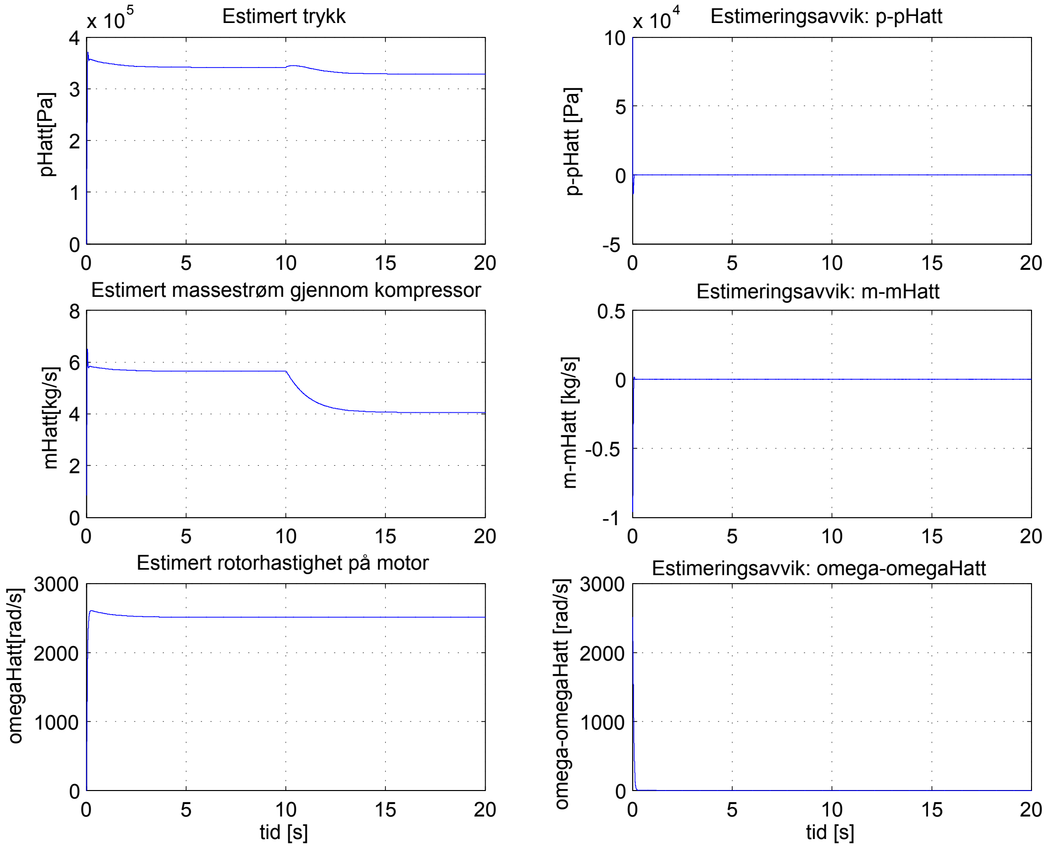


Figur 8.20: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp uten påvirkning av støy.

Figur 8.21 viser at avviket mellom målte og estimerte tilstander retter seg kjapt inn mot null. Grafene avslører dermed at systemet med regulator og estimator sammenkoblet er stabilt når det ikke er påvirket av noen form for støy.

8.2.4 Estimerte tilstander med støy

Som med åpen sløyfe simuleringen skal reguleringssystemet med estimator utsettes for støy. Fordi det er systemets robusthet som skal testes blir

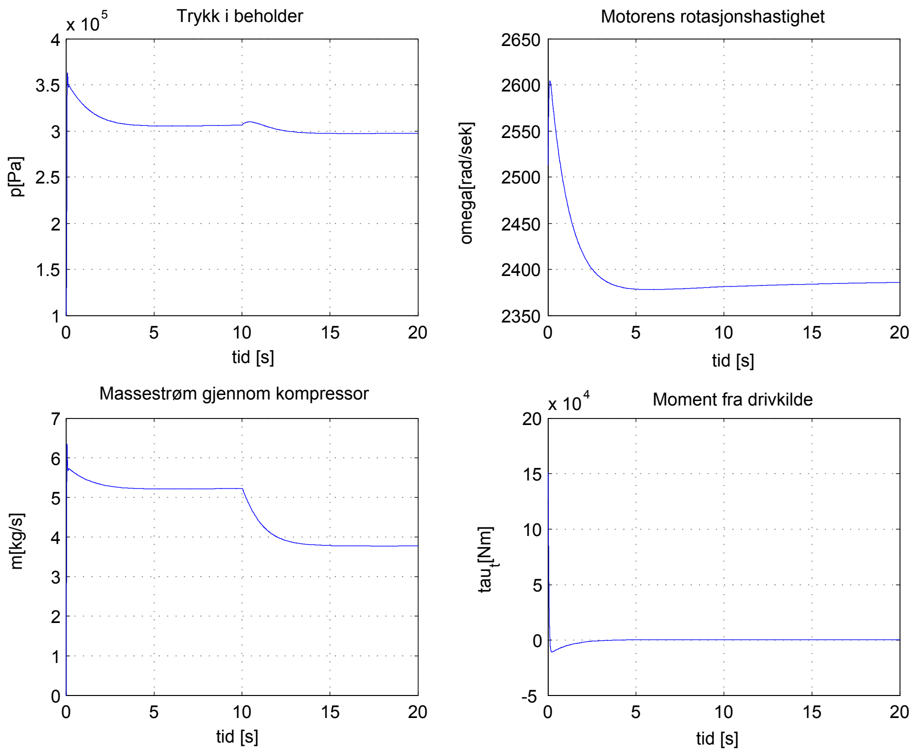


Figur 8.21: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik.

regulatoren også påvirket av støy, siden den tar i bruk de støypåvirkete estimerte tilstandene $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$. Systemet blir kjørt med tre ulike støyscenarioer. Først vil systemet bli utsatt for stasjonær støy på $(1.75\cdot 10\hat{}4\,[Pa])$ på p_2, $(1.75\cdot 10\hat{}4\,[Pa])$ på p og $(125.65\,\left[\frac{rad}{s}\right])$ på ω. Den stasjonære støyen er et positivt stasjonæravvik tilsvarende 5% av amplituden til de respektive tilstander. Deretter vil de samme målingene utsettes for hvit støy med middelverdi null og amplitude på $\pm 10\%$ av måleverdien. For p blir dette $(\pm 3.5\cdot 10^4\,[Pa])$, for p_2 blir dette $(\pm 3.5\cdot 10^4\,[Pa])$og for ω blir dette $(\pm 251.2\,\left[\frac{rad}{s}\right])$. Siden m ikke er målbar blir den ei heller påvirket av støy. Deretter vil systemet utsettes for hvit støy og stasjonærstøy. Det vil for hver støypåvirkning presenteres figurer hvor de målte tilstandene enten er direkte påvirket av støy eller indirekte påvirket av støy. Direkte påvirket støy innebærer at målepunktet er rett etter at tilstandene blir påvirket av støyen fra enten boksen med stasjonær støy eller hvit støy. Indirekte påvirket støy innebærer at målepunktet er rett før at tilstandene blir påvirket av støyen fra enten boksen med stasjonær støy eller hvit støy. Dette kommer tydelig fram av figur 8.5. For at systemet skal bli påvirket av støy endres posisjonen til bryteren "Switch". Fordi regulatoren benytter estimerte tilstander vil denne også bli påvirket av støy.

Estimerte tilstander med stasjonær støy

Boksen med stasjonærstøy fra simulinkdiagrammet i figur 8.5 kobles til. Figur 8.22 og figur 8.24 viser tilstandsforløpet med indirekte og med direkte stasjonærstøy.

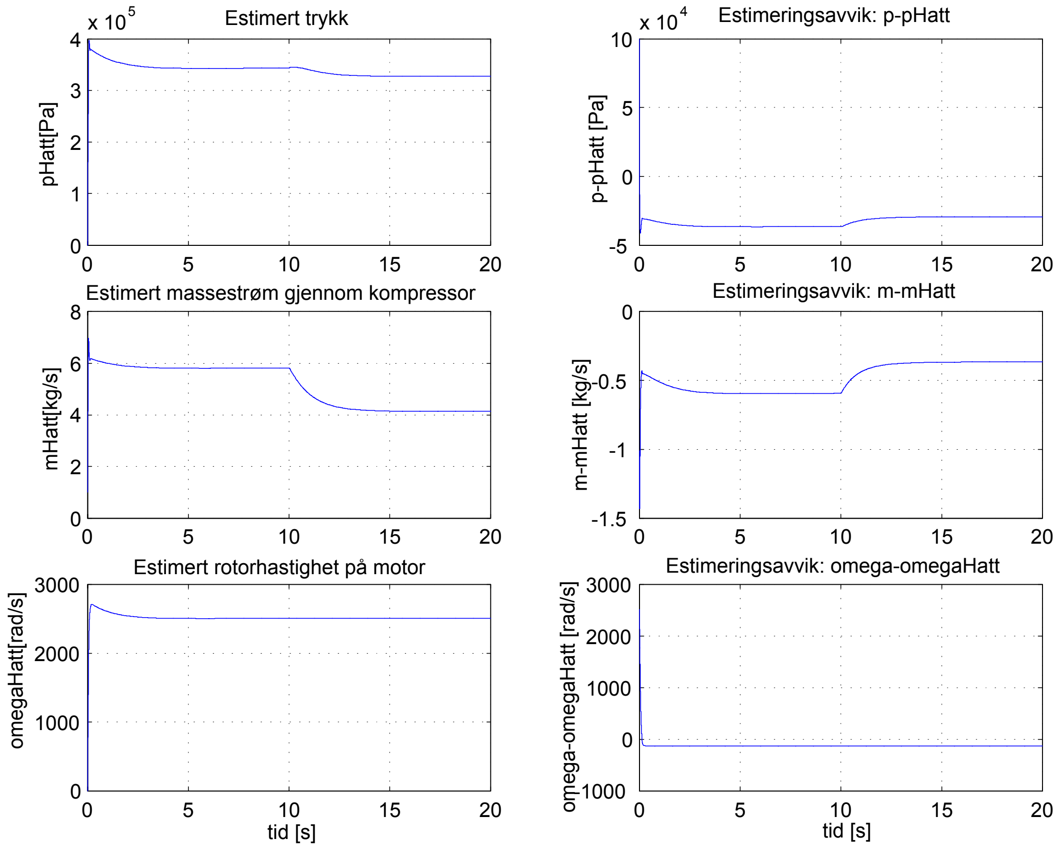


Figur 8.22: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av stasjonærstøy.

Stasjonæravviket mellom målinger med direkte støy og estimerte tilstander med støy leses av figur 8.25 til å være:

$$\begin{array}{ll} -1.9 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ -0.6\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ 0[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Videre leses stasjonæravviket mellom målinger med indirekte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.23 til å være:



Figur 8.23: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander med indirekte påvirkning av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy.

$$\begin{array}{ll} -3.7 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ -0.6\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ -125.7[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Figurene hvor målingene ikke er påvirket av støy avslører at estimatoren sammen med regulator ikke filtrerer bort stasjonæravviket i noen av tilstandene. $\hat{m}$ får med seg deler av stasjonæravviket til p_2, p, $\hat{p}$ og ω, mens målt m ikke er påvirket av støy i det hele tatt. Dette gjør at grafen over avviket $m - \hat{m}$ er identisk i figur 8.23 og i figur 8.25. Ved $t = 10s$ endres ventilåpningen. Det gjør at stasjonæravviket i $m - \hat{m}$ endrer seg fra $-0.6\,\left[\frac{kg}{s}\right]$ til $-0.37\,\left[\frac{kg}{s}\right]$. Dette skjer fordi "støybidraget" fra $\hat{p}$ minker da det inntreffer et trykkfall ved endringen av ventilåpningen. Stasjonæravviket mellom p med direkte støy og $\hat{p}$ med støy er på $-1.9 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$. Stasjonæravviket mellom p med indirekte støy og $\hat{p}$ med støy er på $-3.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$. Det blir også gjort et hopp ved $t = 10s$ i grafen for $p - \hat{p}$ i figur 8.25, fra $-1.9 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$ til $-1.2 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$. Naturligvis inntreffer tilsvarende endringer på $0.7 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$ ved $t = 10s$ i avviket mellom p uten støy og $\hat{p}$ med støy Dette skjer fordi støybidraget fra $\hat{m}$ avtar. Forskjellen mellom ω uten støy og $\hat{\omega}$ med støy er $-125.7[\frac{rad}{s}]$. Stasjonæravviket mellom $p - \hat{p}$ og $m - \hat{m}$ er litt større enn ved åpen sløyfe simuleringen. Dette skyldes antageligvis at estimatoren nå er koblet til regulatoren.

Estimerte tilstander med hvit støy

I denne simuleringen benyttes simulinkdiagrammet i figur 8.5. Ved denne simuleringen er boksen med stasjonærstøy er slått av og boksen med hvit støy er slått på. Hvilke målinger støyen påvirker og amplituden til støyen er nevnt i kapittel 8.2.4. Figur 8.26 og figur 8.28 viser tilstandsforløpet med indirekte og med direkte hvit støy.

Årsaken til de store avvikene i målingene med støy på estimerte tilstandene og målingene er at utslagene fra hver av de støyinfiserte målingene blir i verste fall summert med utslagene til hver av de estimerte tilstandene. I verste fall vil støyen på målingene og støyen på de estimerte tilstandene bli addert når avvikene mellom estimert og målt tilstand beregnes.

Likevel er utslaget nokså lite når estimerte tilstander med støy sammenlignes med målinger med indirekte støy. Mens den hvite støyen som pøses på målingene p, ω, og p_2 er henholdsvis $(\pm 3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa])$, $(\pm 251.3\,\left[\frac{rad}{s}\right])$ og $(\pm 3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa])$, kan avviket mellom målinger som er direkte påvirket av støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.27 leses av til å være:

$\pm 5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$	for $p - \hat{p}$
$\pm 0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right]$	for $m - \hat{m}$
$\pm 250[\frac{rad}{s}]$	for $\omega - \hat{\omega}$

Videre leses avviket mellom målinger indirekte påvirket av støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.27 til å være:

$\pm 1.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$	for $p - \hat{p}$
$\pm 0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right]$	for $m - \hat{m}$
$\pm 30[\frac{rad}{s}]$	for $\omega - \hat{\omega}$

Årsaken til at forskjellen mellom m og $\hat{m}$ er lik uavhengig av målingene med indirekte eller med direkte støy er at m ikke kan måles og er derfor ikke belastet med støy. Det betyr at i figur 8.29 og figur 8.27 er grafene med $m - \hat{m}$,(notasjonen på figurene er m-mhatt), identiske. Det er også verdt å merke seg at systemet med regulator og estimator er stabilt.

Estimerte tilstander med hvit støy og stasjonær støy

I denne simuleringen er både boksen med stasjonærstøy og boksen med hvit støy fra simulinkdiagrammet i figur 8.5 slått på. Figur 8.30 og figur 8.32 viser tilstandsforløpet med indirekte og med direkte stasjonærstøy og hvit støy.

I dette tilfellet viser figur 8.31 og figur 8.33 at den hvite støyen legger seg oppå stasjonærstøyen. Stasjonæravviket mellom målinger med direkte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.33 leses av til å være:

$$\begin{array}{ll} -1.9 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ -0.6\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ 0[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Og stasjonæravviket mellom målinger med indirekte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.31 til å være:

$$\begin{array}{ll} -3.7 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ -0.6\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ -125.7[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

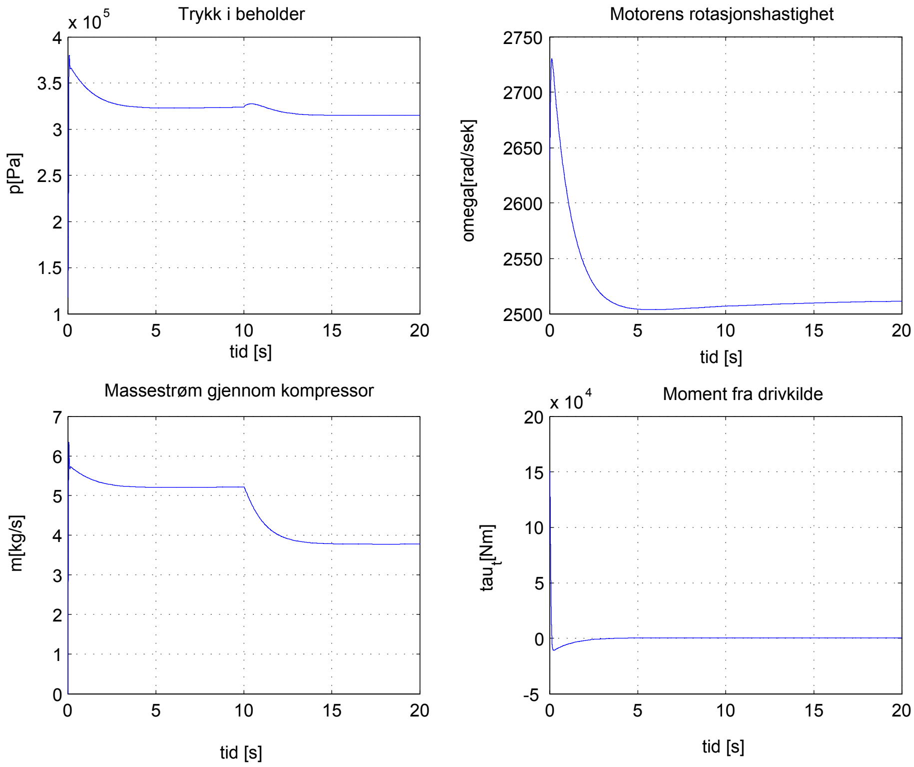
Som tidligere nevnt legger den hvite støyen seg oppå stasjonærstøyen, slik at avviket mellom målinger med direkte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.33 leses av til å være:

$$\begin{array}{ll} \pm 5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 250[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}, \end{array}$$

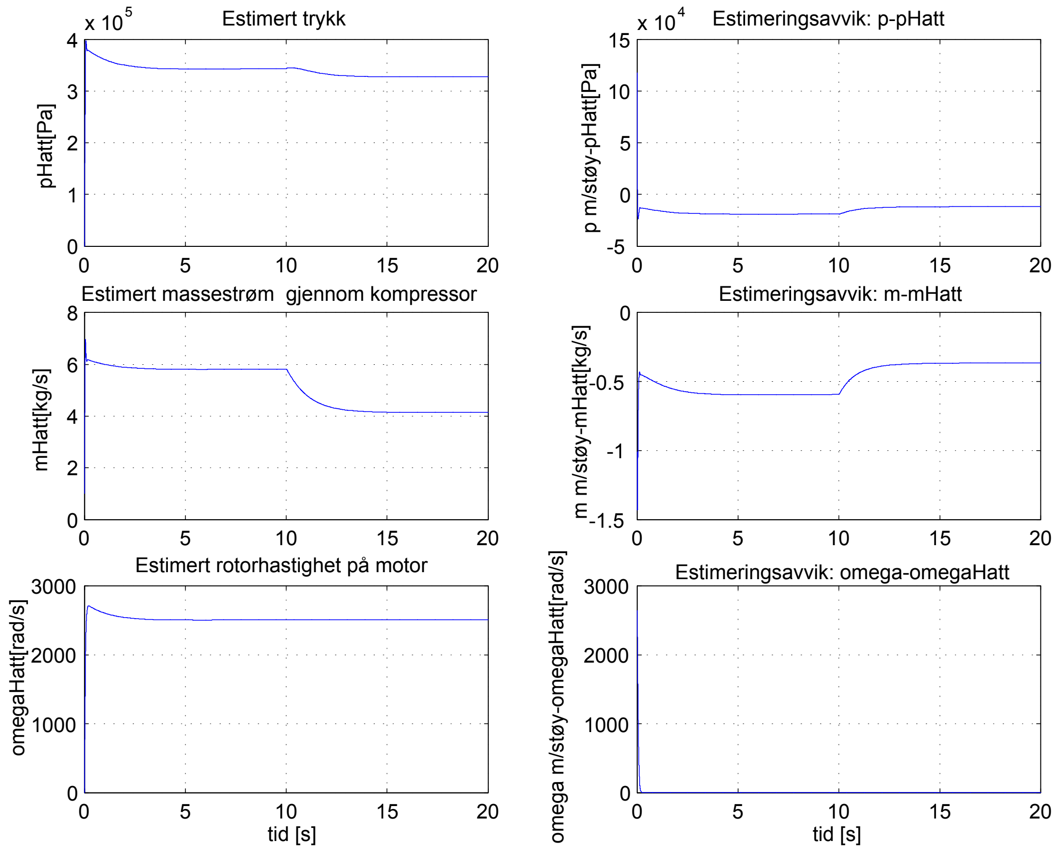
med stasjonæravviket som middelverdi. Videre leses avviket mellom målinger med indirekte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.31 til å være:

$$\begin{array}{ll} \pm 1.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 30[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}, \end{array}$$

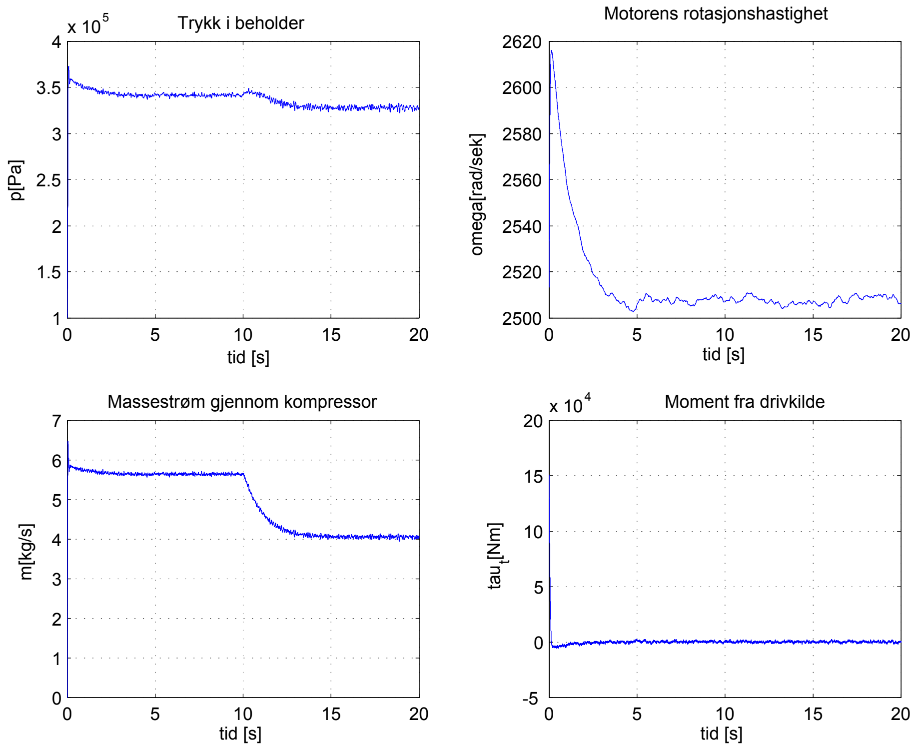
med stasjonæravviket som middelverdi. Det samme mønsteret som observeres i simuleringen med stasjonærstøy og i simuleringen med hvit støy gjentar seg. Det vil si at estimatoren sammenkoblet med regulator ikke klarer å eliminere stasjonæravviket og har en viss evne til å filtrere bort deler av den hvite støyen. Systemet med estimator og regulator er stabilt.



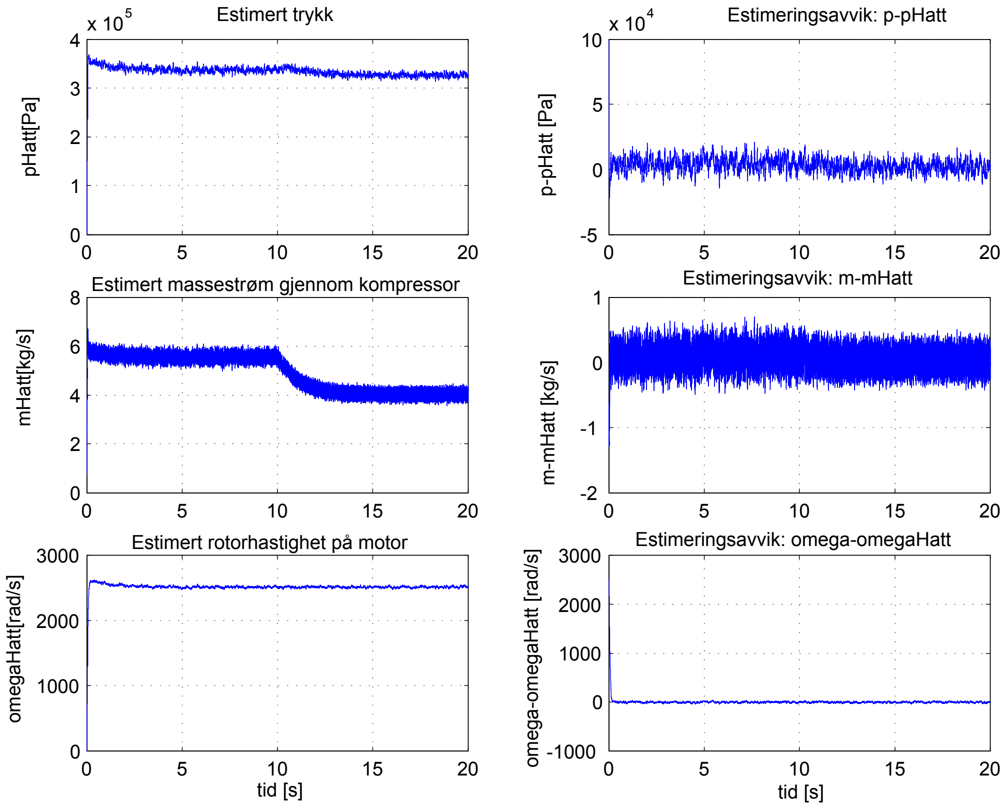
Figur 8.24: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av stasjonærstøy.



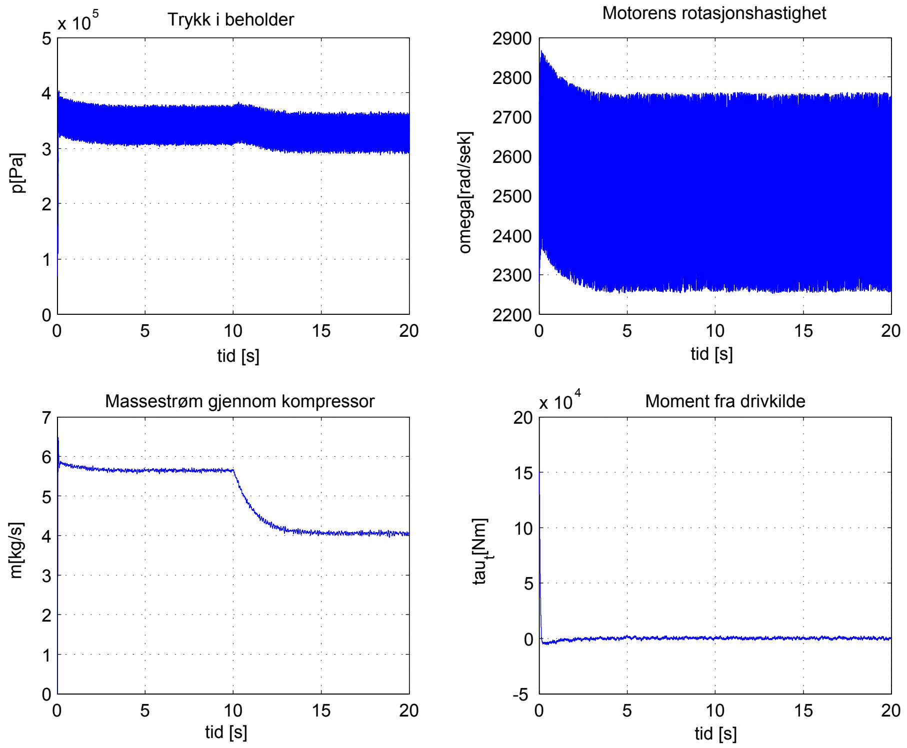
Figur 8.25: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy.



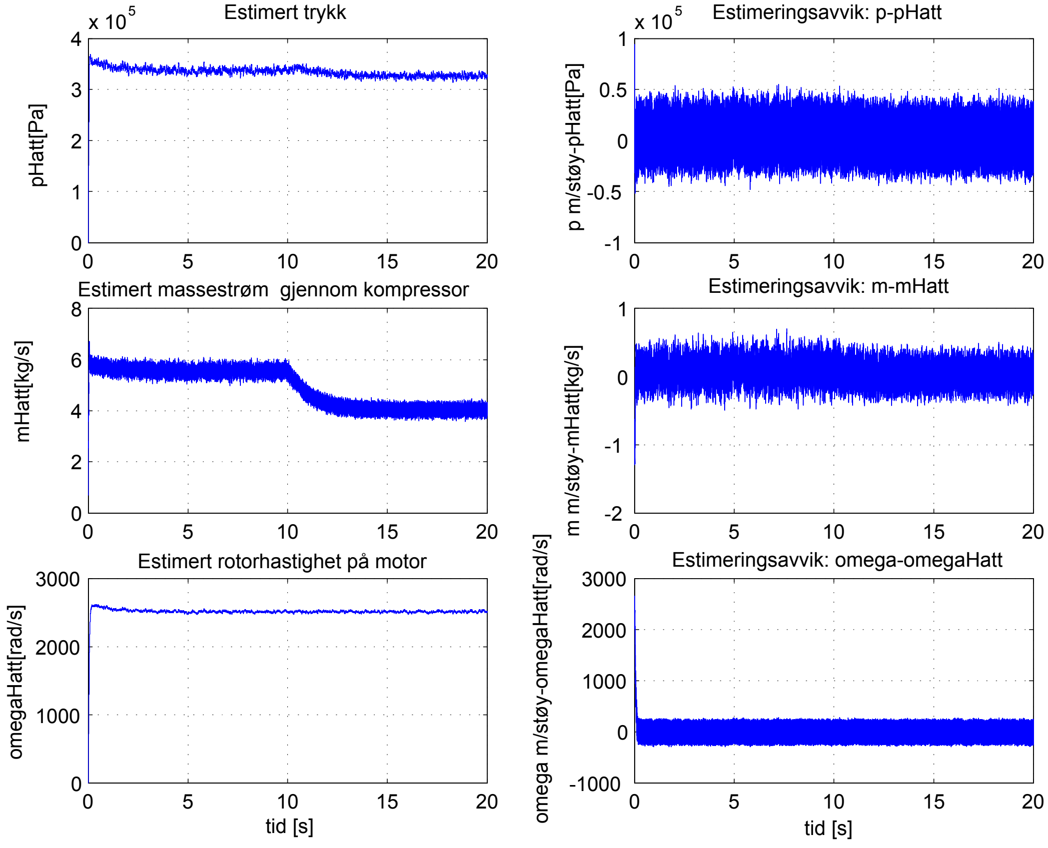
Figur 8.26: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit støy.



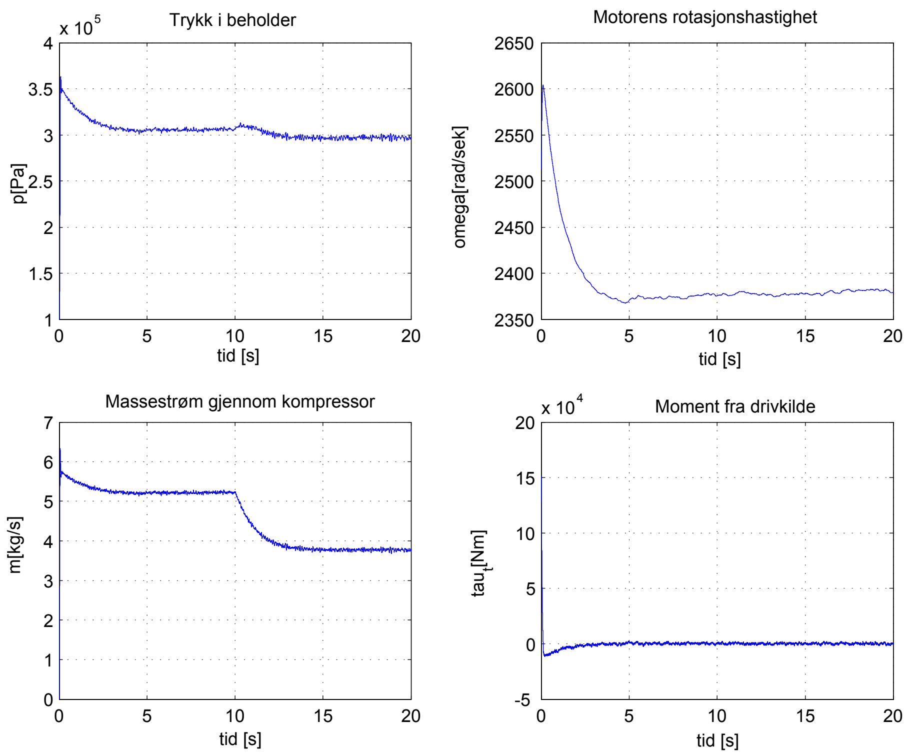
Figur 8.27: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy.



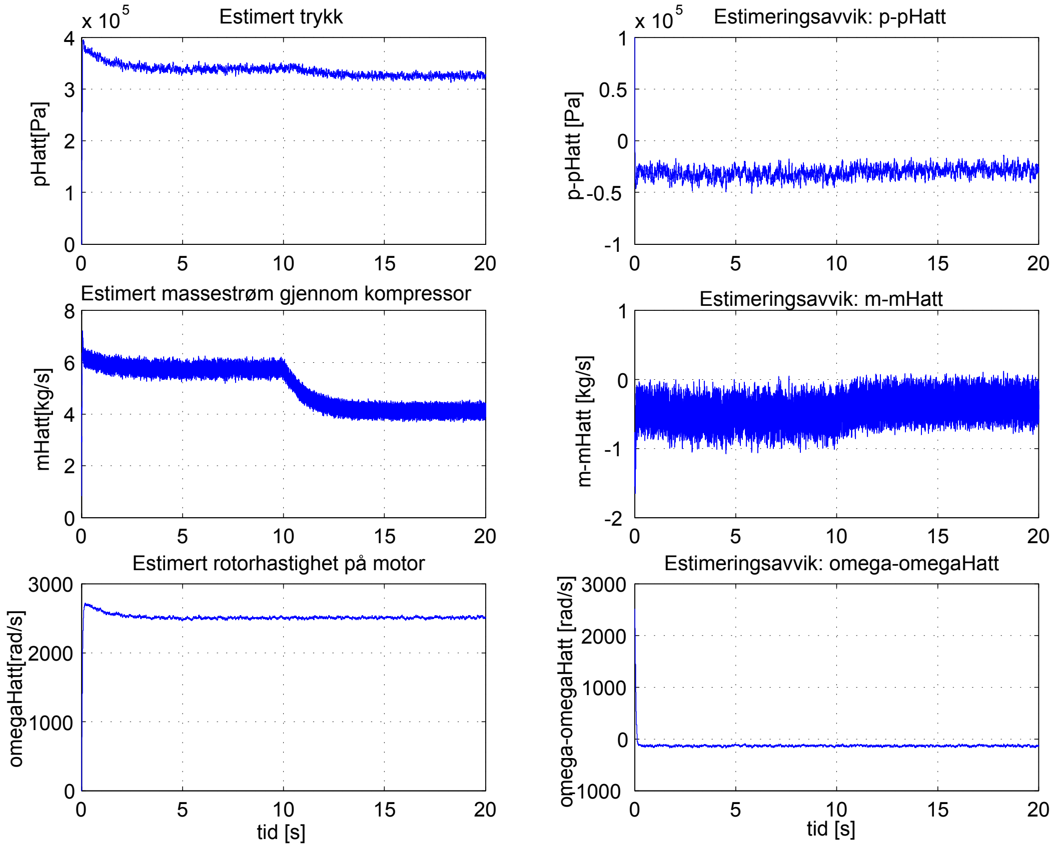
Figur 8.28: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av hvit støy.



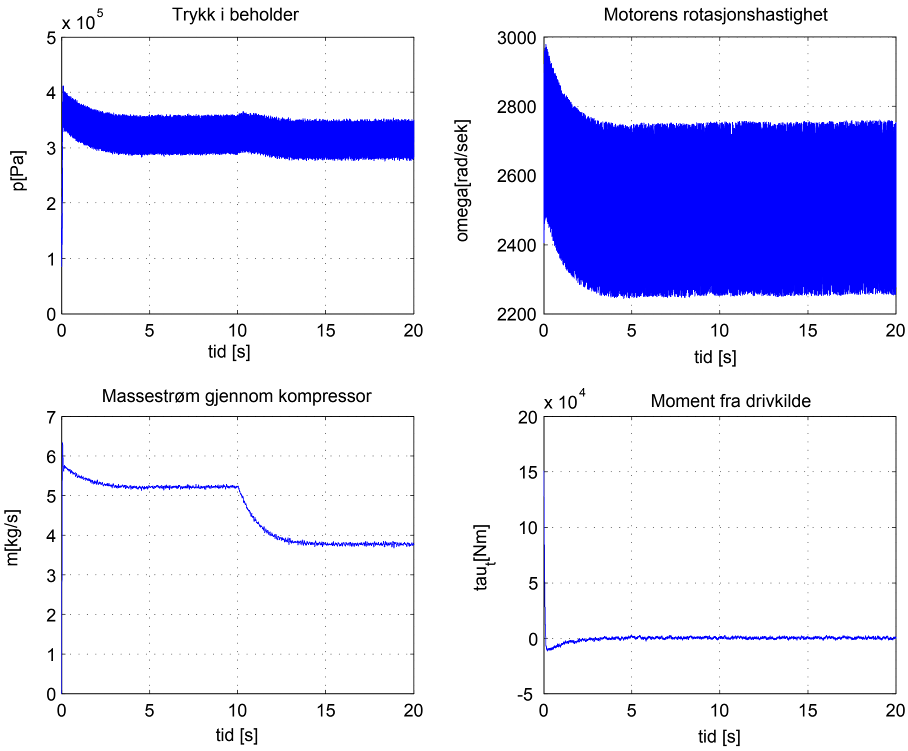
Figur 8.29: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy.



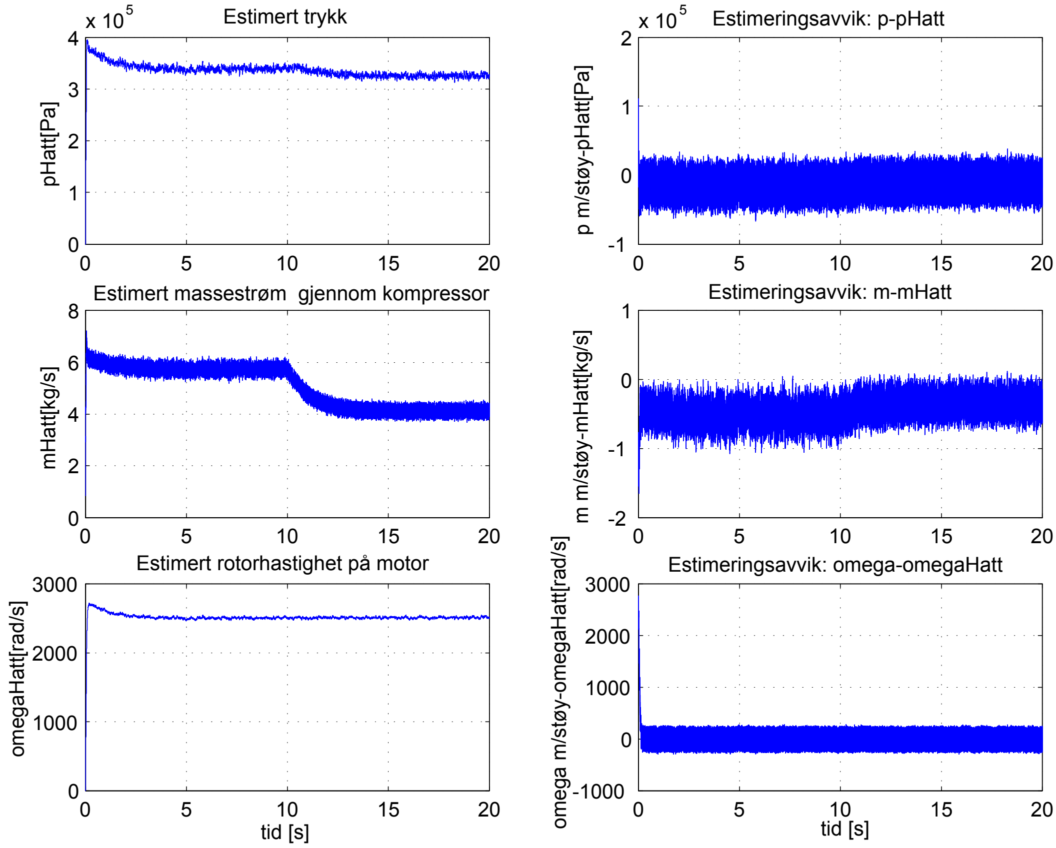
Figur 8.30: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.31: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy.



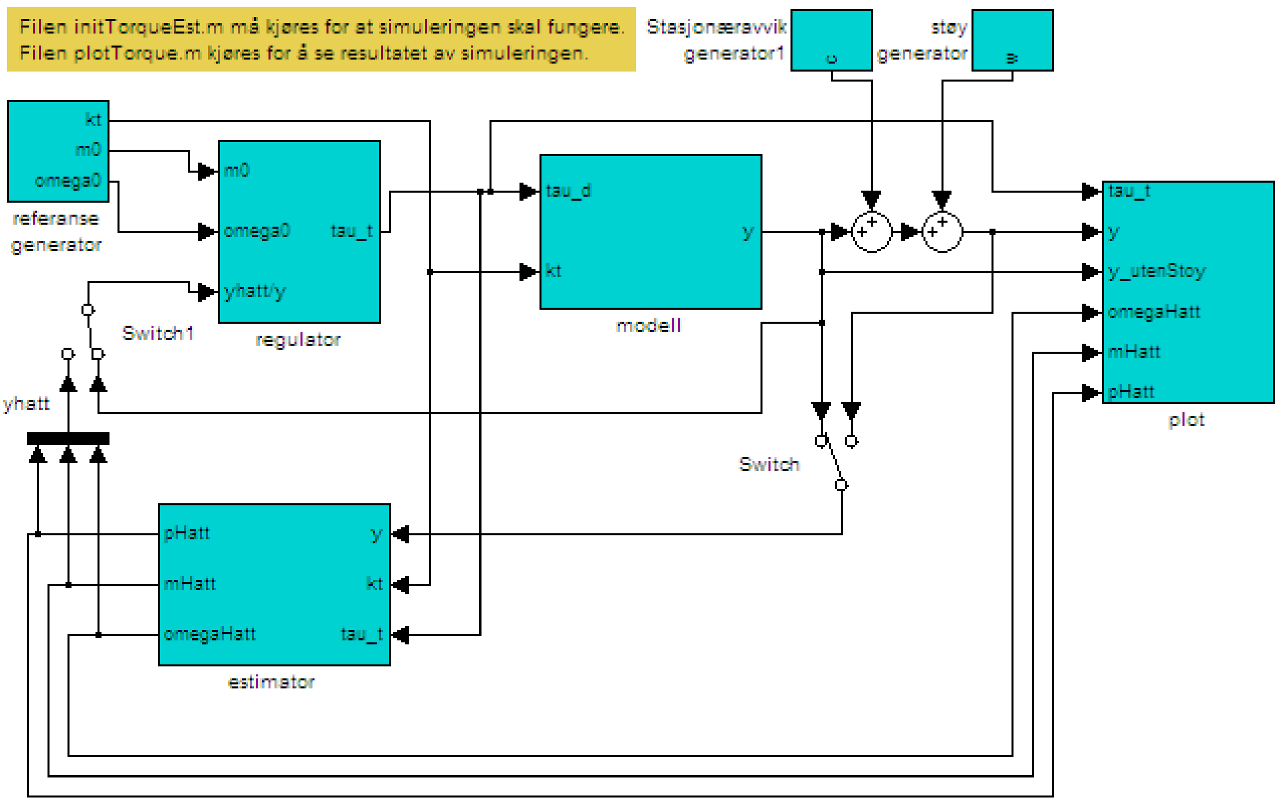
Figur 8.32: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.33: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy.

8.3 Fullstate estimator for regulering med drivmoment

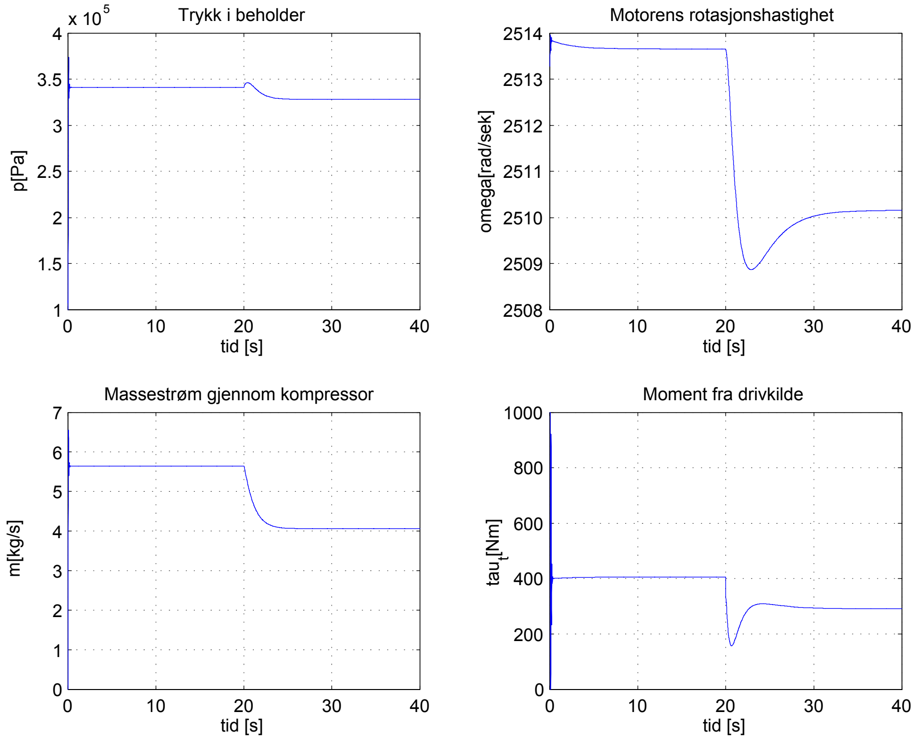
Simuleringen av regulering med drivmoment utføres som tidligere nevnt i kapittel 8. Simuleringene foregår over en periode på 40 sekunder, hvor k_t endres etter $t = 20\ s$. I simuleringene benyttes en Euler integrator med fast tastetid $T = 0.005\ s$. Regulatorparametrene er satt til $k_v = 0.2$, $k_p = 60$ og $k_i = 7$. Figur 8.34 viser simulinkdiagrammet som ble brukt for simuleringen. Estimator forsterkningene er satt til $k_{\tilde{m}} = 33.12$, $k_{\tilde{p}} = 10$, $k_{\tilde{\omega}1} = 10$og $k_{\tilde{\omega}2} = 0.000001$.



Figur 8.34: Simulinkdiagram for regulering med drivmoment.

8.3.1 Målte tilstander

Først skal det undersøkes hvordan estimatoren oppfører seg uten støy i åpen sløyfe. Åpen sløyfe uten støy innebærer at bryteren i figur 8.34 ”Switch1” står i en slik posisjon at regulatoren tar inn målte tilstander og bryteren ”Switch” står i en posisjon hvor estimatoren tar inn målinger uten støy. Figur 8.35 viser tilstandsforløpet til systemet.

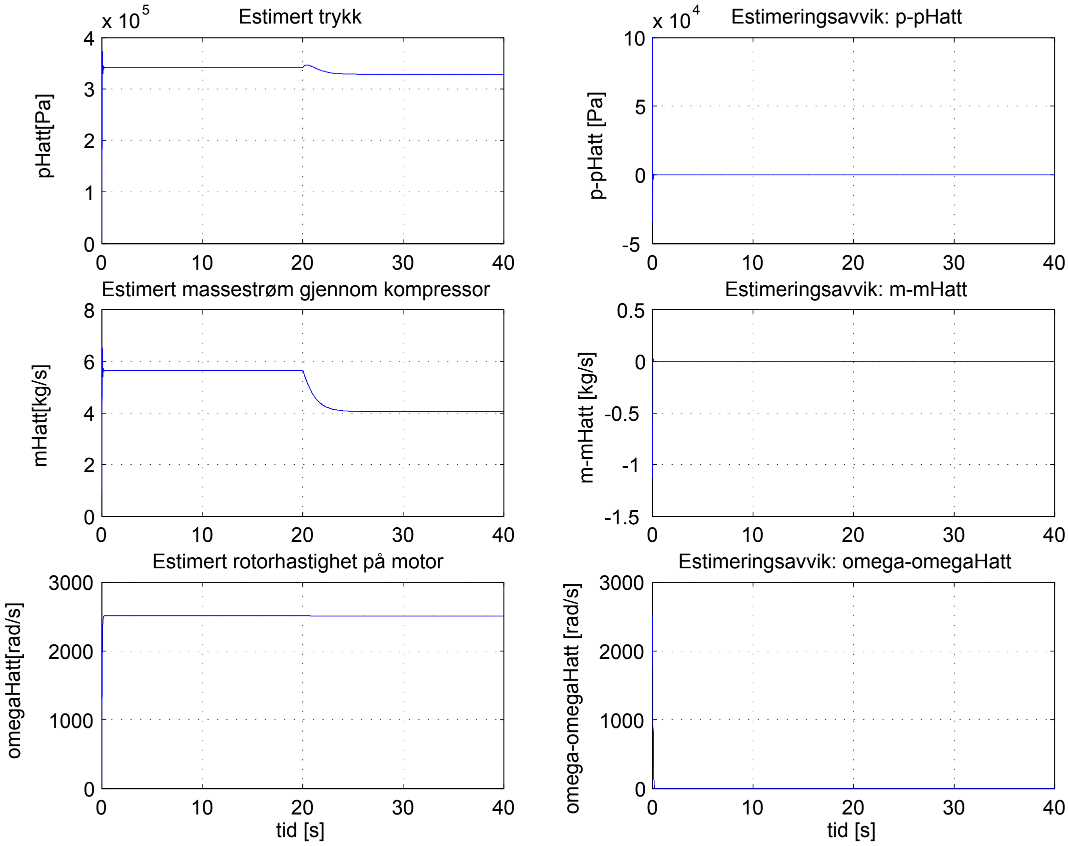


Figur 8.35: Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp ved simulering med målte tilstander på regulatorinngang.

Ut i fra figur 8.36 er tydelig at estimatoravviket raskt svinger seg inn til null i avvik for alle tre tilstander. Dette bekrefter resultatene fra stabilitetsanalysen i kapittel 7.

8.3.2 Målte tilstander med støy

Som i simuleringene med tettkobletventil er det nødvendig å påvirke målingene av kompressorsystemets tilstander med støy. Siden det er estimatorens robusthet som skal testes benyttes tilstandene uten støy inn til regulatoren. Systemet blir kjørt med tre ulike støyscenarioer. Først vil estimatoren bli utsatt for stasjonær støy på $(1.75 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa])$ på p_2, $(1.75 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa])$ på p og $(125.65\,[\frac{rad}{s}])$ på ω. Den stasjonære støyen er et positivt stasjonæravvik tilsvarende 5% av amplituden til de respektive tilstander. Deretter vil de samme målingene utsettes for hvit støy med middelverdi null og amplitude på $\pm 10\%$ av måleverdien. For p blir dette $(\pm 3.5 \cdot 10^4\,[Pa])$, for p_2 blir dette $(\pm 3.5 \cdot 10^4\,[Pa])$og for ω blir dette $(\pm 251.2\,[\frac{rad}{s}])$. Deretter vil estimatoren utsettes for hvit støy og stasjonærstøy. Det vil for hver simulering også bli satt opp en figur med avvik mellom tilstander uten støy og estimerte tilstander med støy og en figur med avvik mellom tilstander med støy



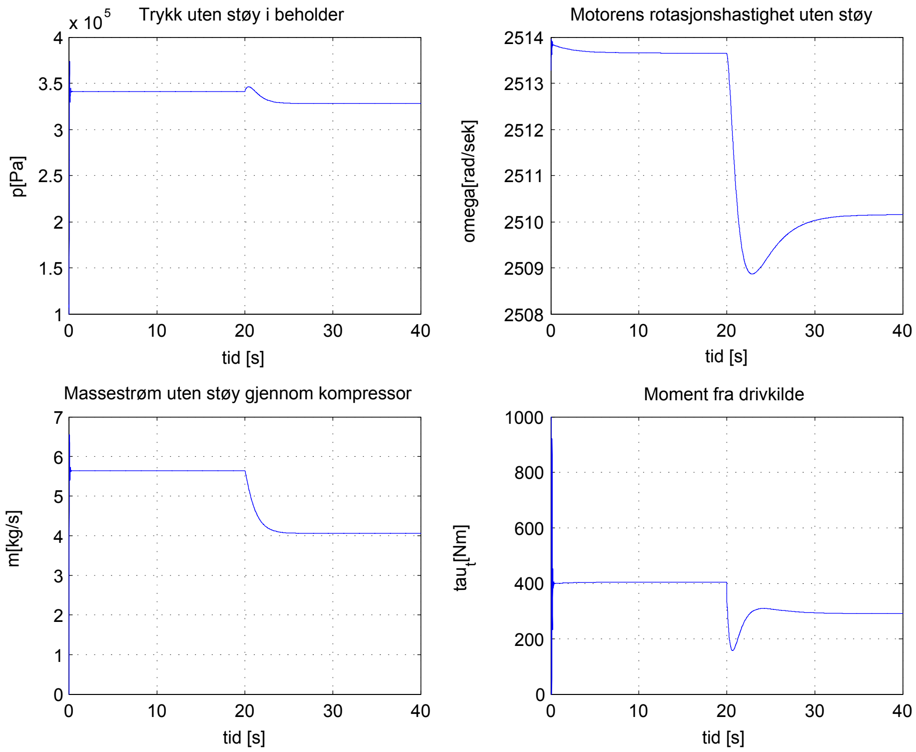
Figur 8.36: Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik.

og estimerte tilstander med støy. I figur 8.34 vil bryteren "Switch" innta en slik posisjon at estimatoren tar inn støy.

Målte tilstander med stasjonærstøy

I denne simuleringen blir p_2, p, og ω utsettes for et positivt stasjonæravvik tilsvarende 5% av amplituden til de respektive tilstander. Det innebærer at p_2, p, og ω vil få påført et stasjonæravvik på henholdsvis $(1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa])$, $(1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa])$ og $(125.65\,[\frac{rad}{s}])$. m blir ikke påført støy fordi m ikke er målbar. I simulinkdiagrammet i figur 8.34 kan det sees hvordan støyen kobles på. Den ene boksen i figur 8.34 er for stasjonærstøy og den andre for hvit støy. I denne simuleringen blir kun boksen for stasjonærstøy i figur 8.34 brukt. Her kreves det også at bryteren "Switch" endrer posisjon slik at estimatoren tar inn støybefengte målinger. Figur 8.37 og figur 8.39 viser tilstandsforløpet med og uten stasjonærstøy.

Stasjonæravviket mellom målinger med støy og estimerte tilstander med støy fra



Figur 8.37: Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp uten påvirkning av s-tasjonærstøy.

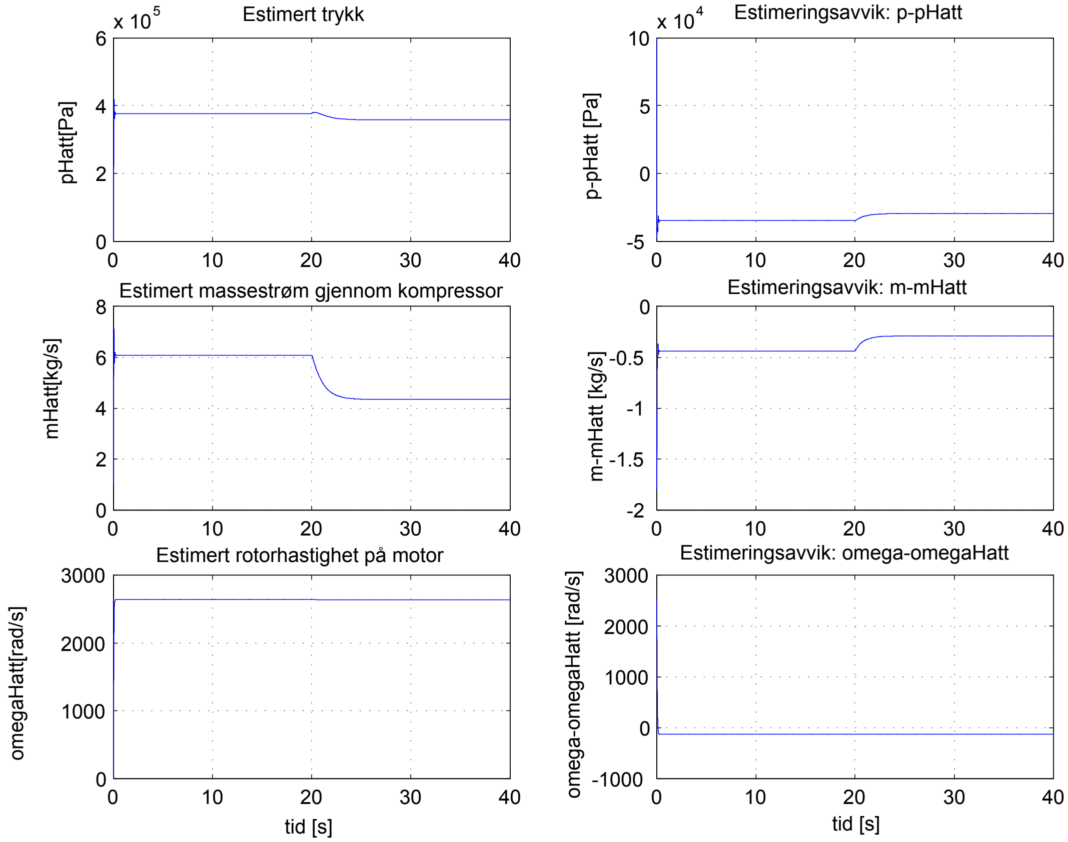
figur 8.40 leses av til å være:

$$\begin{array}{ll} -1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ -0.44\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ 0[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Videre leses stasjonæravviket mellom målinger uten støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.38 til å være:

$$\begin{array}{ll} -3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ -0.44\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ -125.7[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Figur 8.38, hvor målingene ikke er påvirket av støy, avslører at estimatoren ikke filtrerer bort stasjonæravviket i noen av tilstandene. $\hat{m}$ får med seg deler av stasjonæravviket til p_2, p, $\hat{p}$ og ω, mens målt m ikke er påvirket av støy i det hele tatt. Ved $t = 20s$ endres ventilåpningen. Det gjør at stasjonæravviket i $m - \hat{m}$ endrer seg fra $-0.44\,\left[\frac{kg}{s}\right]$ til $-0.29\,\left[\frac{kg}{s}\right]$. Dette skjer fordi "støybidraget" fra $\hat{p}$ minker da det inntreffer et trykkfall ved dette tidspunktet. Stasjonæravviket

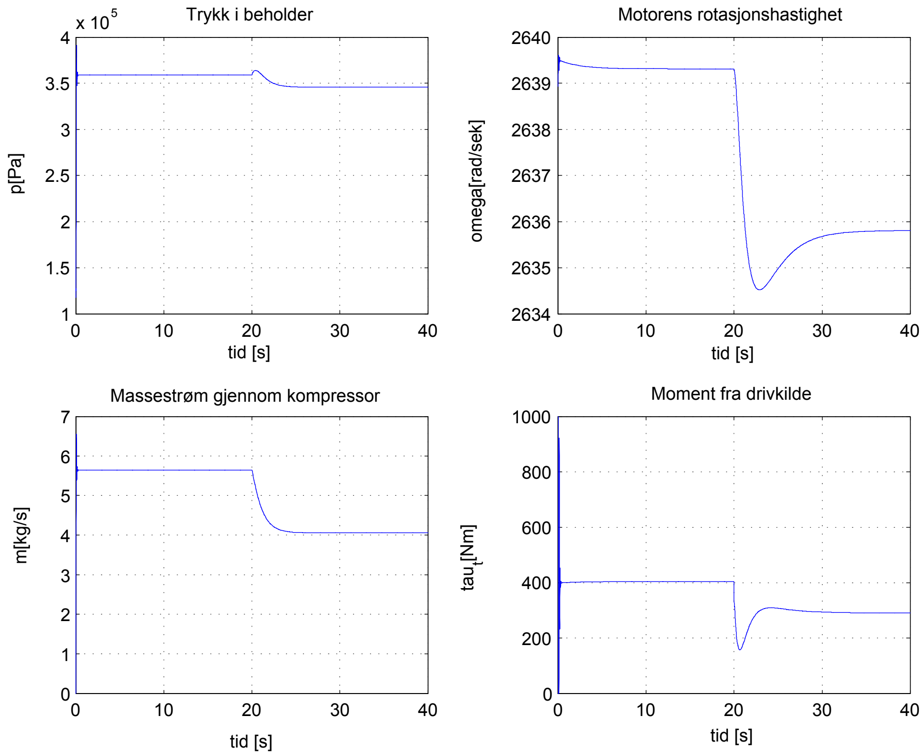


Figur 8.38: Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy.

mellom p med støy og $\hat{p}$ med støy er på $-1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$. Stasjonæravviket mellom p uten støy og $\hat{p}$ med støy er på $-3.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$. Det blir også gjort et hopp i stasjonæravviket ved $t = 20s$ i grafen for $p - \hat{p}$ i figur 8.40,fra $-1.75 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$ til $-1.2 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$, som inntreffer siden $\hat{p}$ lar seg påvirke av det reduserte støybidraget fra $\hat{m}$. Naturligvis inntreffer tilsvarende endringer på $0.7 \cdot 10\hat{}4\,[Pa]$ ved $t = 20s$ i avviket mellom p uten støy og $\hat{p}$ med støy. Forskjellen mellom ω uten støy og $\hat{\omega}$ med støy er $-125.7[\frac{rad}{s}]$.

Målte tilstander med hvit støy

I denne simuleringen vil simulinkdiagrammet i figur 8.34 bli benyttet. Ved denne simuleringen er boksen med stasjonærstøy er slått av og boksen med hvit støy er slått på. Hvilke målinger støyen påvirker og amplituden til støyen er nevnt i 8.3.2. Figur 8.41 og figur 8.43 viser tilstandsforløpet uten og med hvit støy.



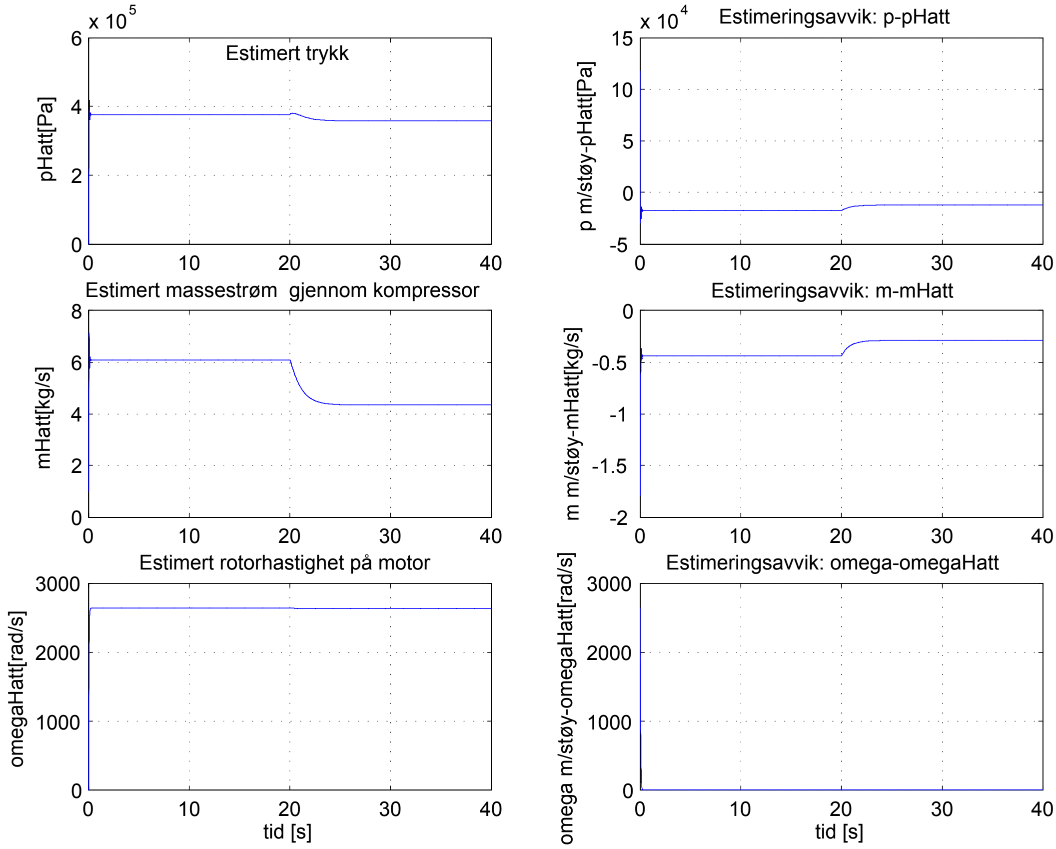
Figur 8.39: Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp med påvirkning av s-tasjonærstøy.

Årsaken til de store avvikene i målingene med støy på estimerte tilstandene og målingene er at utslagene fra hver av de støyinfiserte målingene blir i verste fall summert med utslagene til hver av de estimerte tilstandene. I verste fall vil støyen på målingene og støyen på de estimerte tilstandene bli addert når avvikene mellom estimert og målt tilstand beregnes.

Likevel er utslaget nokså lite når estimert tilstander med støy sammenlignes med måling uten støy. Mens den hvite støyen som pøses på målingene p, ω, og p_2 er henholdsvis ($\pm 3.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$), ($\pm 251.3\,\left[\frac{rad}{s}\right]$) og ($\pm 3.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$), kan avviket mellom målinger med støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.44 leses av til å være:

$$
\begin{array}{ll}
\pm 1.0 \cdot 10\hat{\ }5\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
\pm 1.2\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
\pm 340[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}
\end{array}
$$

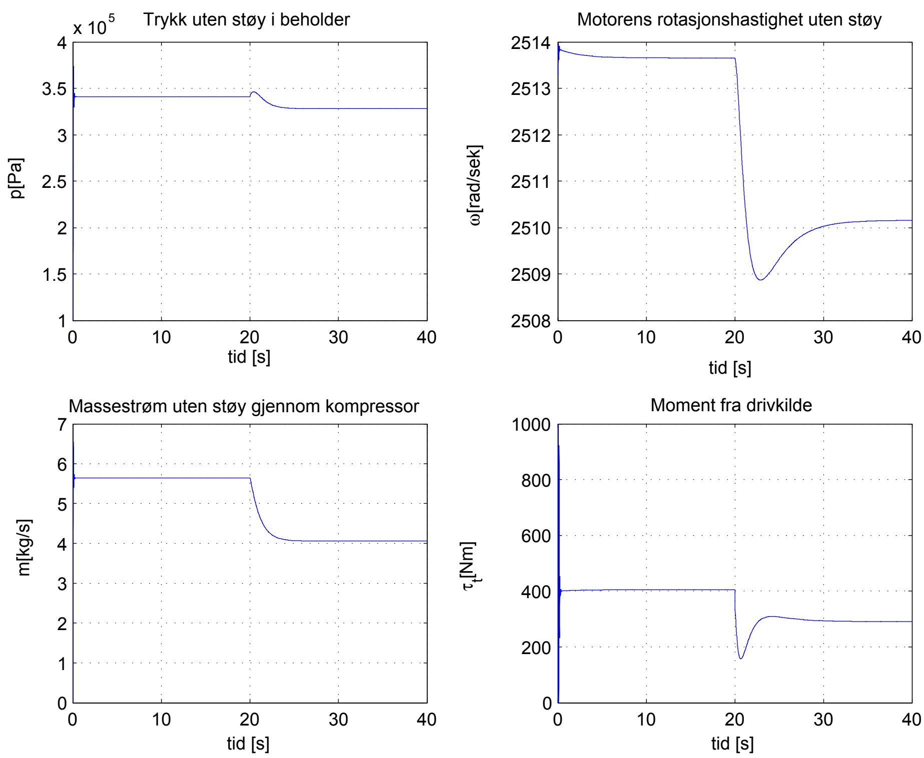
Videre leses avviket mellom målinger uten støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.42 til å være:



Figur 8.40: Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy.

$$\begin{array}{ll} \pm 6.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 1.2\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 120[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Årsaken til at forskjellen mellom m og $\hat{m}$ er lik uavhengig av målingene med eller uten støy er at m ikke kan måles og er derfor ikke belastet med støy. Det betyr at i figur 8.42 og figur 8.44 er grafene med $m - \hat{m}$ (notasjonen på figurene er m-mhatt) identiske. Det er også interessant å se at det er betydelig høyere avvik på estimatoren for regulering drivmoment enn på estimatoren for regulering med tettkoblet ventil for alle tilstander. Forskjellen mellom avvikene til estimatoren for regulering med drivmoment og estimatoren for regulering med tettkoblet ventil er:



Figur 8.41: Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp uten påvirkning av hvit støy.

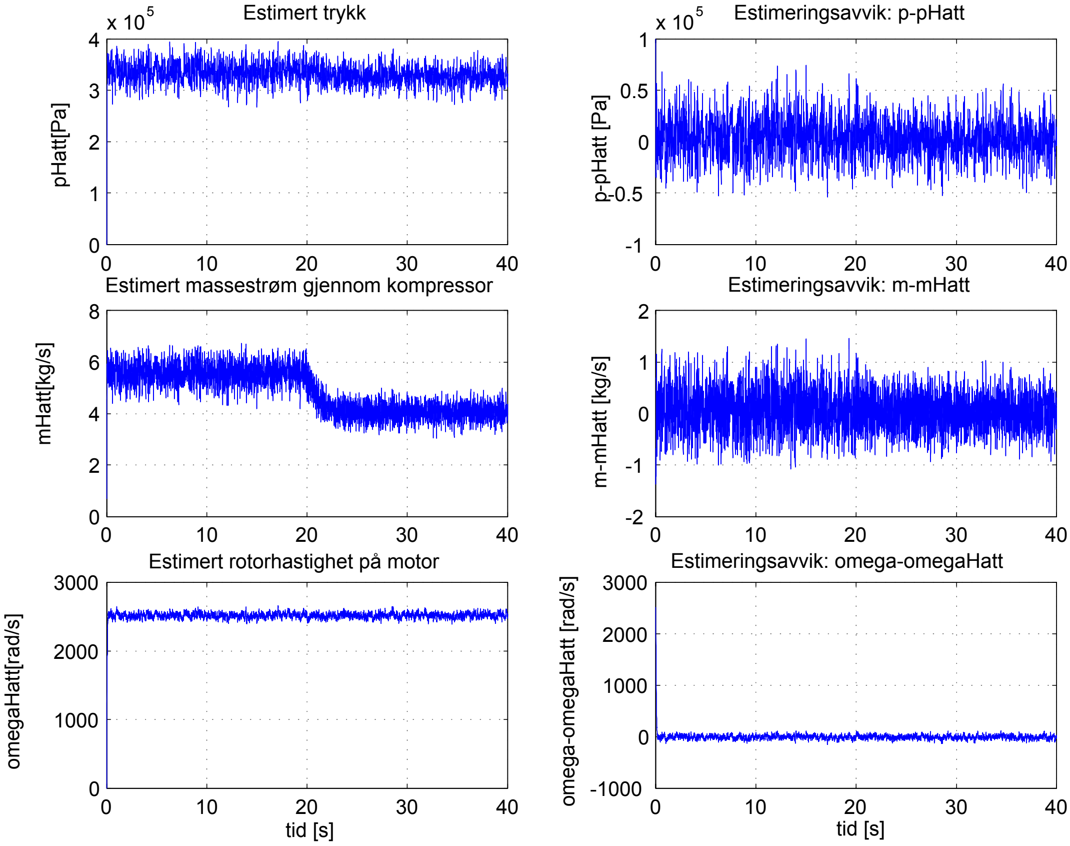
$$\begin{array}{ll} \pm 5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 0.7\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 90[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Dette er relativt store forskjeller. Årsaken til at estimatoren for regulering med drivmoment får større avvik med hvit støy er at estimatoren for regulering med drivmoment mangler en troverdig måling som estimatoren for regulering med tettkoblet ventil har. Estimatoren for regulering med tettkoblet ventil har en "måling" i form av pådraget ψ_v, som er den tettkoblete ventilen. Denne "målingen" øker presisjonen til estimatoren for regulering med tettkoblet ventil.

Målte tilstander med hvit støy og stasjonær støy

Ved denne simuleringen er både boksen med stasjonærstøy og boksen med hvit støy slått på i simulinkdiagrammet på figur 8.34. Figur 8.45 og figur 8.47 viser tilstandsforløpet med og uten hvit og stasjonærstøy.

Figur 8.46 og figur 8.48 viser at den hvite støyen legger seg oppå stasjonærstøyen. Stasjonæravviket mellom målinger med støy og estimerte tilstander med støy fra



Figur 8.42: Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy.

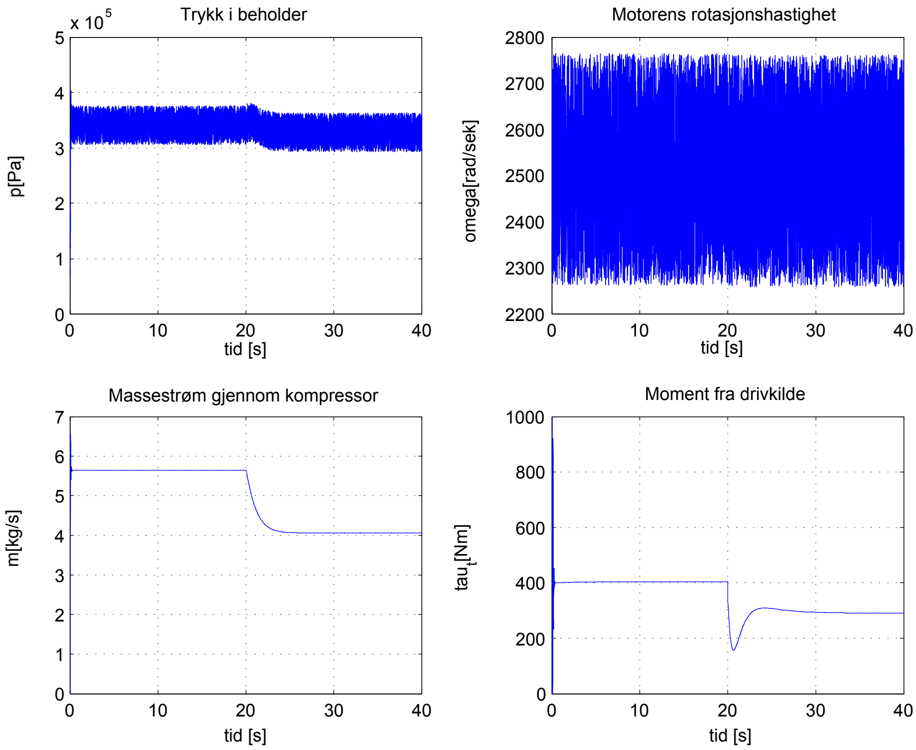
figur 8.48 leses av til å være:

$$\begin{array}{ll} -1.75 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ -0.44\,[\frac{kg}{s}] & \text{for } m - \hat{m} \\ 0[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Og stasjonæravviket mellom målinger uten støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.46 til å være:

$$\begin{array}{ll} -3.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ -0.44\,[\frac{kg}{s}] & \text{for } m - \hat{m} \\ -125.7[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Som tidligere nevnt legger den hvite støyen seg oppå stasjonærstøyen, slik at avviket mellom målinger med støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.48 leses av til å være:



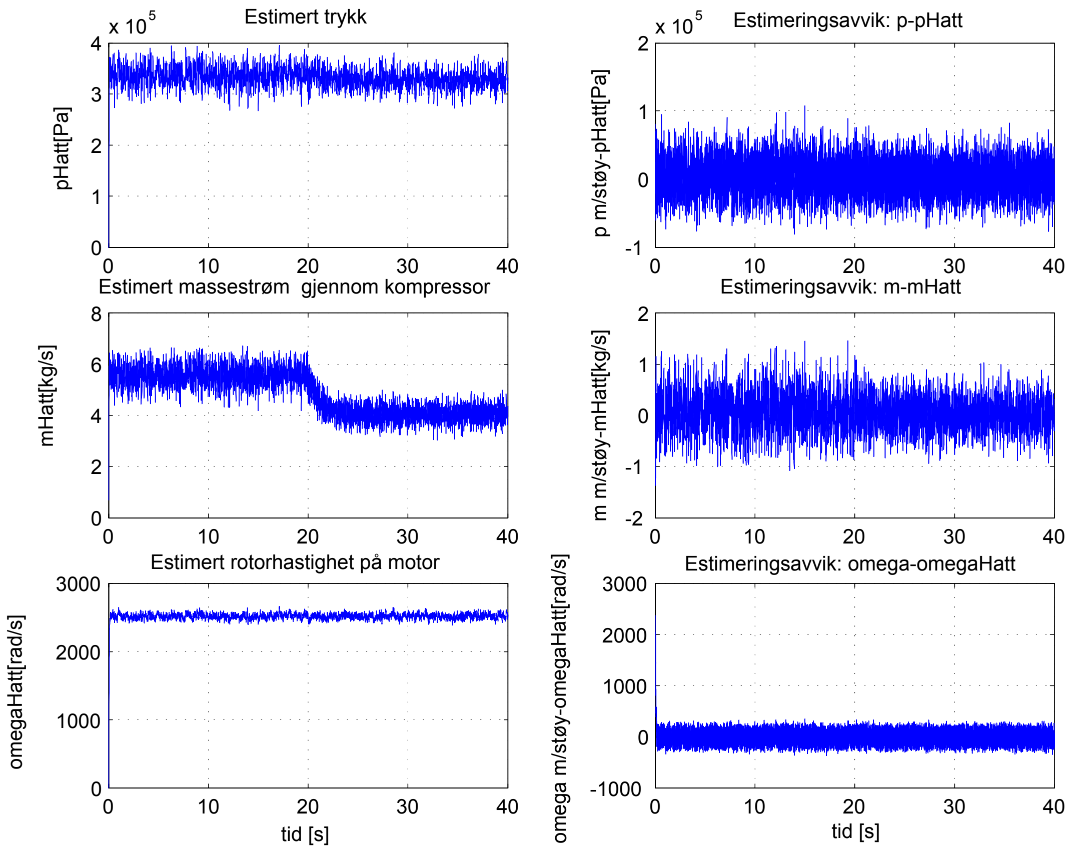
Figur 8.43: Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp med påvirkning av hvit støy.

$$
\begin{array}{ll}
\pm 1.0 \cdot 10\hat{}5\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
\pm 1.2\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
\pm 340[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega},
\end{array}
$$

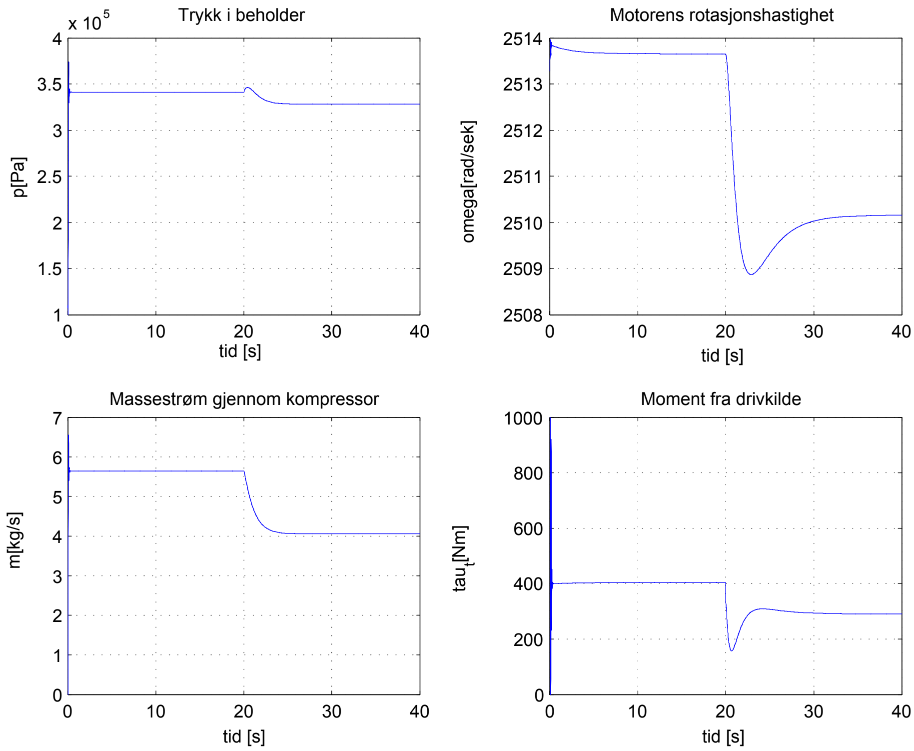
med stasjonæravviket som middelverdi. Videre leses avviket mellom målinger uten støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.46 til å være:

$$
\begin{array}{ll}
\pm 6.5 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
\pm 1.2\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
\pm 120[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega},
\end{array}
$$

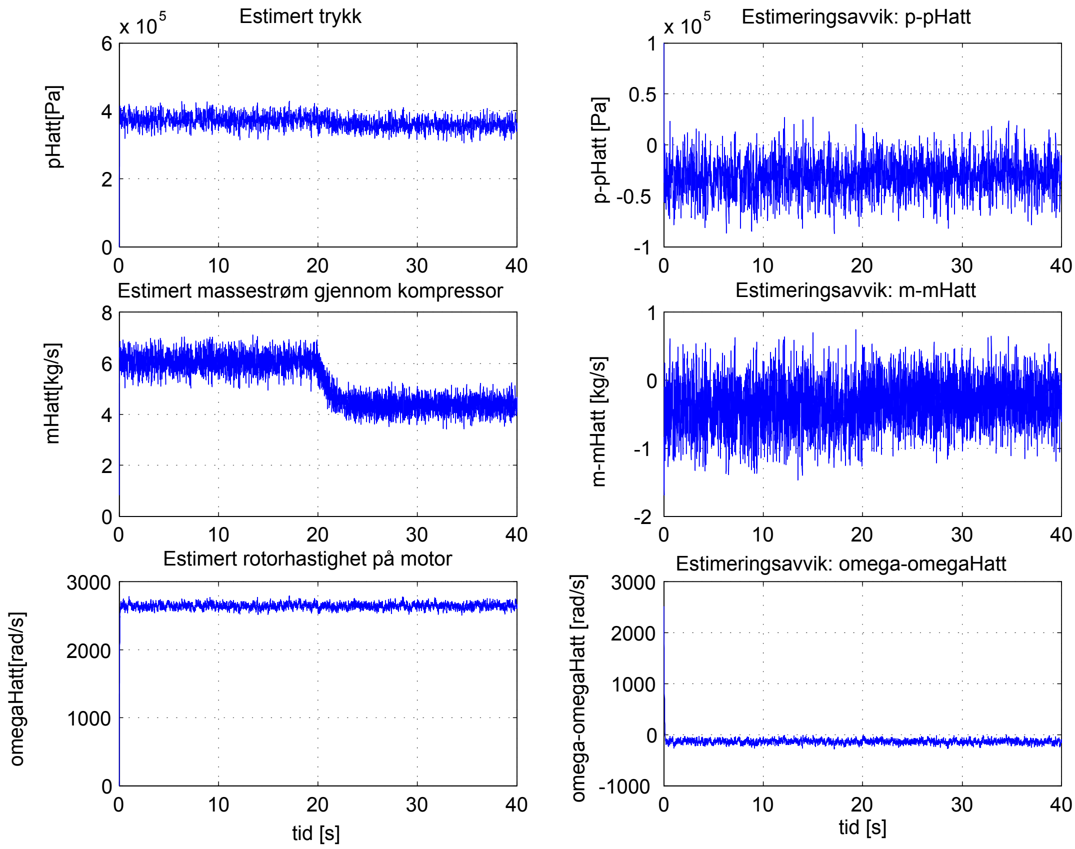
med stasjonæravviket som middelverdi. Det samme mønsteret som observeres i simuleringene med bare stasjonærstøy og med bare hvit støy gjentar seg. Det vil si at estimatoren klarer ikke å eliminere stasjonæravviket og har en viss evne til å filtrere bort deler av den hvite støyen. Også i dette tilfellet er avviket mellom målte og estimerte tilstander større på estimatoren for regulering med drivmoment enn for estimatoren for regulering med tettkoblet ventil. Årsaken er den samme som nevnt i delkapittelet 8.3.2 under Målte tilstander med hvit støy.



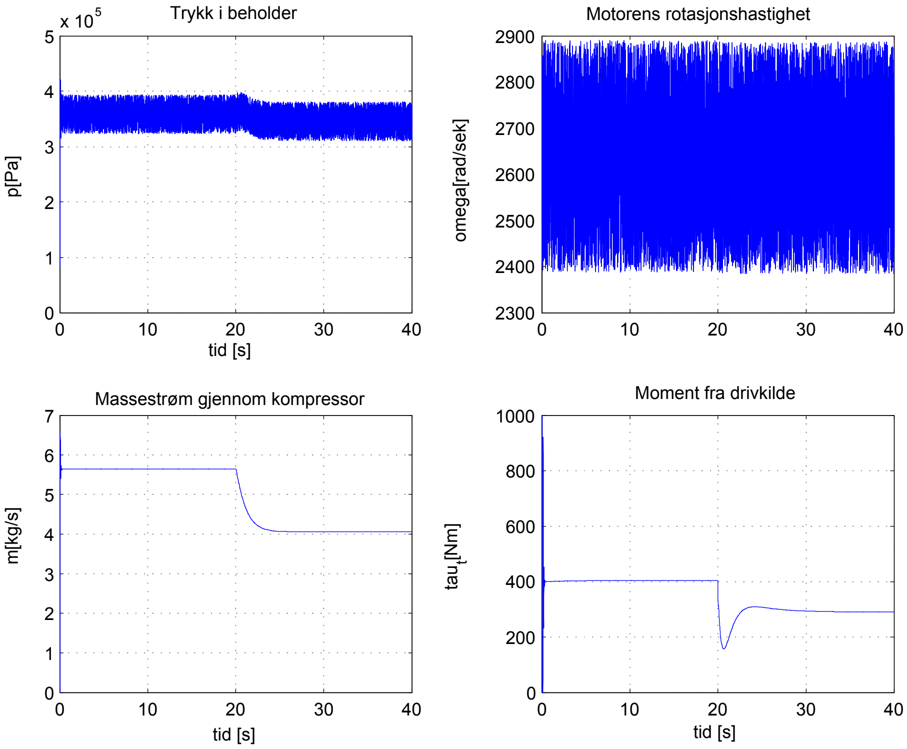
Figur 8.44: Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy.



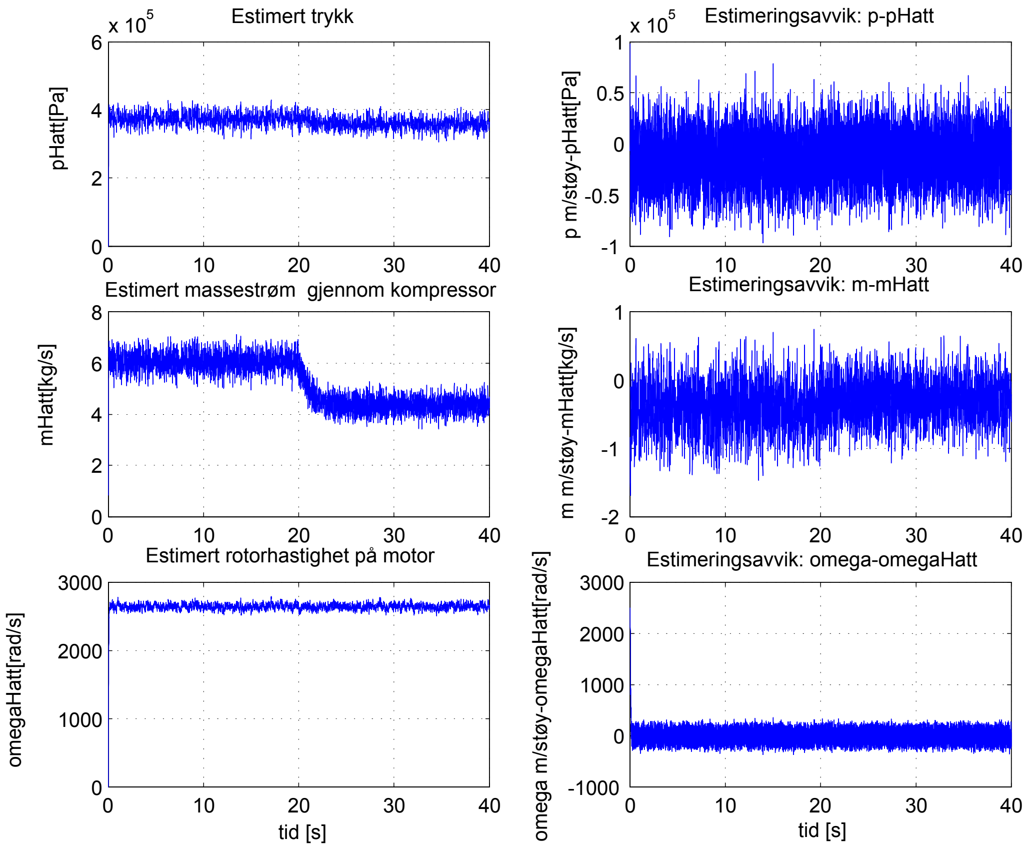
Figur 8.45: Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp uten påvirkning av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.46: Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er upåvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy.



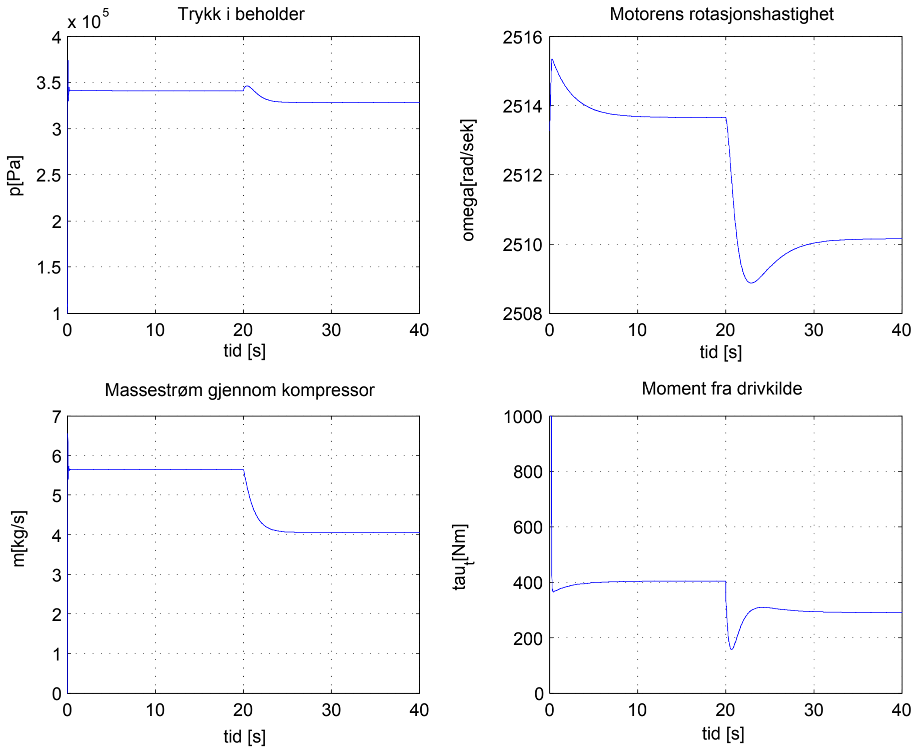
Figur 8.47: Simulering med drivmoment: Tilstandsforløp med påvirkning av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.48: Simulering med drivmoment: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy.

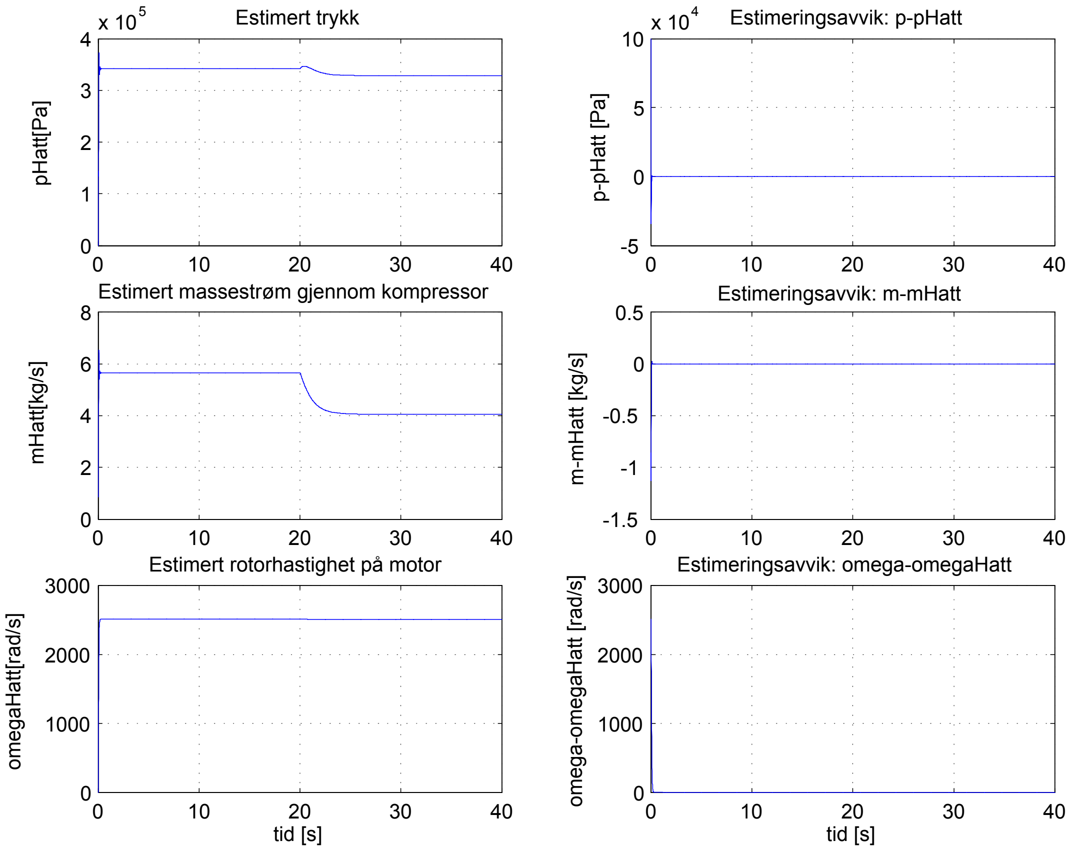
8.3.3 Estimerte tilstander

I denne delen av simuleringene kobles estimatoren, regulatoren og modellen sammen med slik at det blir en lukket sløyfe. Dette innebærer at regulatoren tar inn $\hat{\omega}$ og $\hat{m}$ i stedet for ω og m. Dette kan sees ut i fra simulinkdiagrammet på figur 8.34, hvor bryteren "Switch1" settes i en posisjon slik at regulatoren tar inn estimerte tilstander. Bryteren "Switch" avgjør hvorvidt estimatoren tar inn støybefengte målinger eller målinger uten støy. I denne simuleringen er "Switch" koblet slik at estimatoren tar inn målinger uten støy Figur 8.49 viser tilstandsforløpet til systemet.



Figur 8.49: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp uten påvirkning av støy.

Figur 8.50 viser at avviket mellom målte og estimerte tilstander retter seg kjapt inn mot null. Med likevektspunktene og ventilåpningen anvendt i denne simuleringen avslører grafene dermed at systemet med regulator og estimator sammenkoblet er stabilt når det ikke er påvirket av noen form for støy.



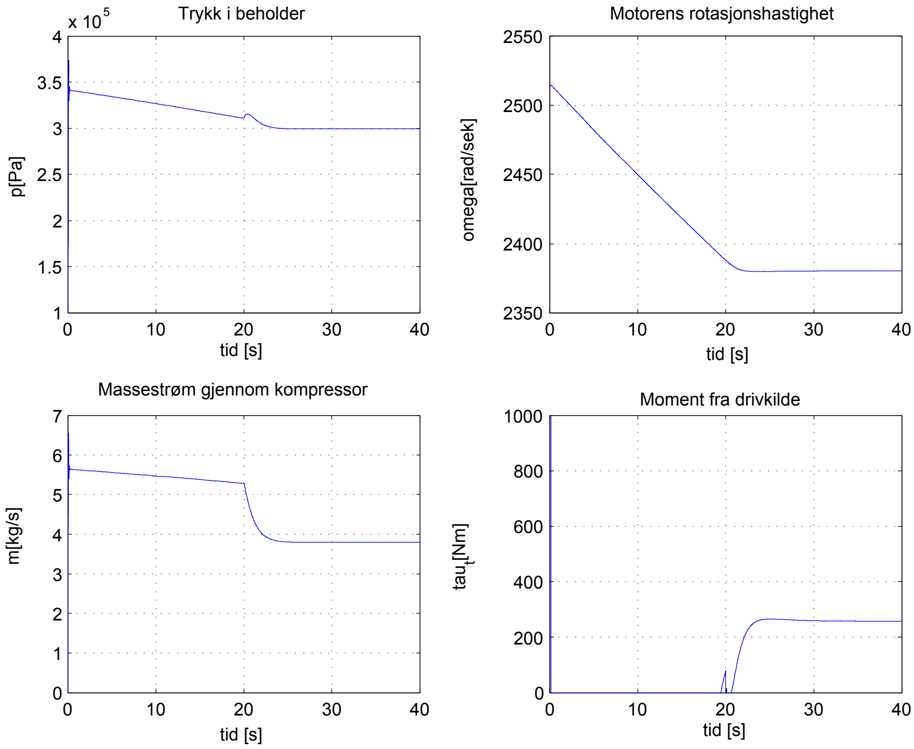
Figur 8.50: Simulering med tettkoblet ventil, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik.

8.3.4 Estimerte tilstander med støy

Som med åpen sløyfe simuleringen skal reguleringssystemet med estimator utsettes for støy. Fordi det er systemets robusthet som skal testes blir regulatoren også påvirket av støy, siden den tar i bruk de støypåvirkete estimerte tilstandene $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$ Systemet blir kjørt med tre ulike støyscenarioer. Først vil systemet bli utsatt for stasjonær støy på $(1.75 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa])$ på p_2, $(1.75 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa])$ på p og $(125.65\,\left[\frac{rad}{s}\right])$ på ω. Den stasjonære støyen er et positivt stasjonæravvik tilsvarende 5% av amplituden til de respektive tilstander. Deretter vil de samme målingene utsettes for hvit støy med middelverdi null og amplitude på $\pm 10\%$ av måleverdien. For p blir dette $(\pm 3.5 \cdot 10^4\,[Pa])$, for p_2 blir dette $(\pm 3.5 \cdot 10^4\,[Pa])$ og for ω blir dette $(\pm 251.2\,\left[\frac{rad}{s}\right])$. Siden m ikke er målbar blir den ei heller påvirket av støy. Deretter vil systemet utsettes for hvit støy og stasjonærstøy. Det vil for hver støypåvirkning presenteres figurer hvor de målte tilstandene enten er direkte påvirket av støy eller indirekte påvirket av støy. Direkte påvirket støy innebærer at målepunktet er rett etter at tilstandene blir påvirket av støyen fra enten boksen med stasjonær støy eller hvit støy. Indirekte påvirket støy innebærer at målepunktet er rett før at tilstandene blir påvirket av støyen fra enten boksen med stasjonær støy eller hvit støy. Dette kommer tydelig fram av figur 8.34. For at systemet skal bli påvirket av støy endres posisjonen til bryteren "Switch" i figur 8.34. Regulatoren benytter estimerte tilstander og vil derfor bli påvirket av støy.

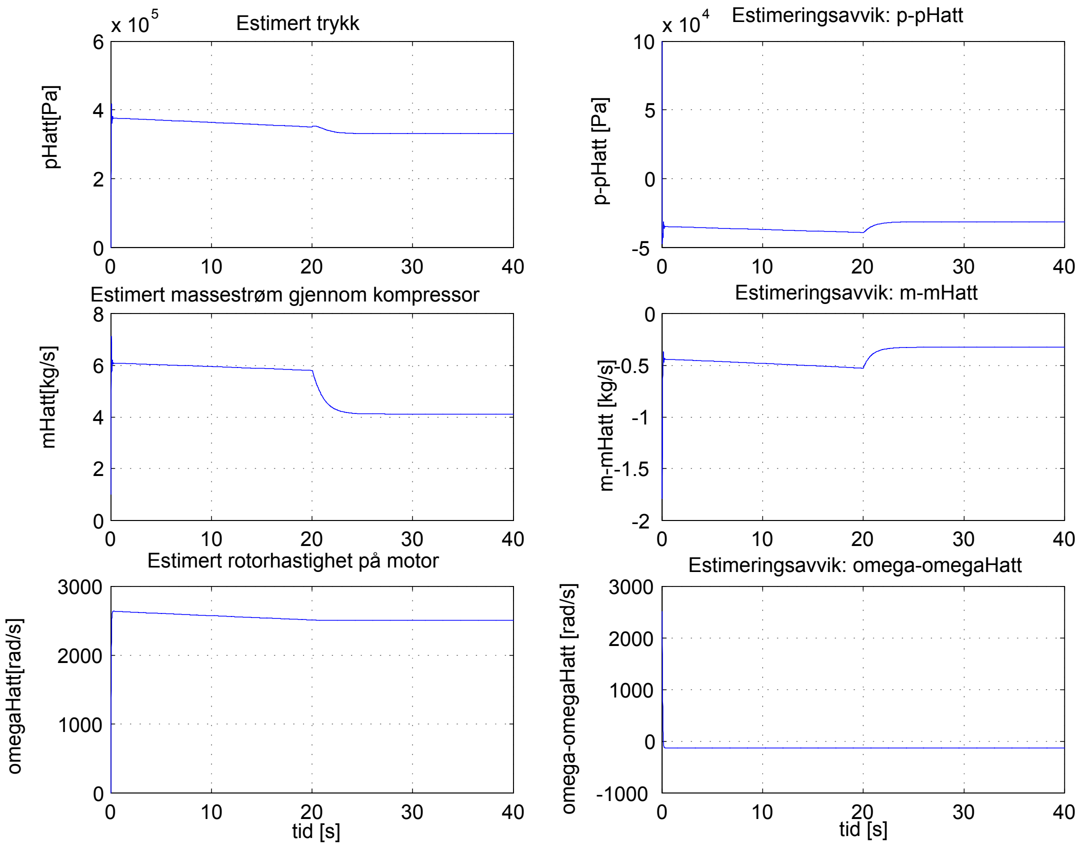
Estimerte tilstander med stasjonær støy

Boksen i simulinkdiagram i figur 8.34 med stasjonærstøy kobles til. Her kreves det at bryteren "Switch" i figur 8.34 endrer posisjon slik at estimatoren tar inn støybefengte målinger. Figur 8.51 og figur 8.53 viser tilstandsforløpet med indirekte og med direkte stasjonær støy.



Figur 8.51: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløpet er indirekte påvirket stasjonærstøy.

Stasjonæravviket mellom målinger med direkte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.54 leses av til å være:



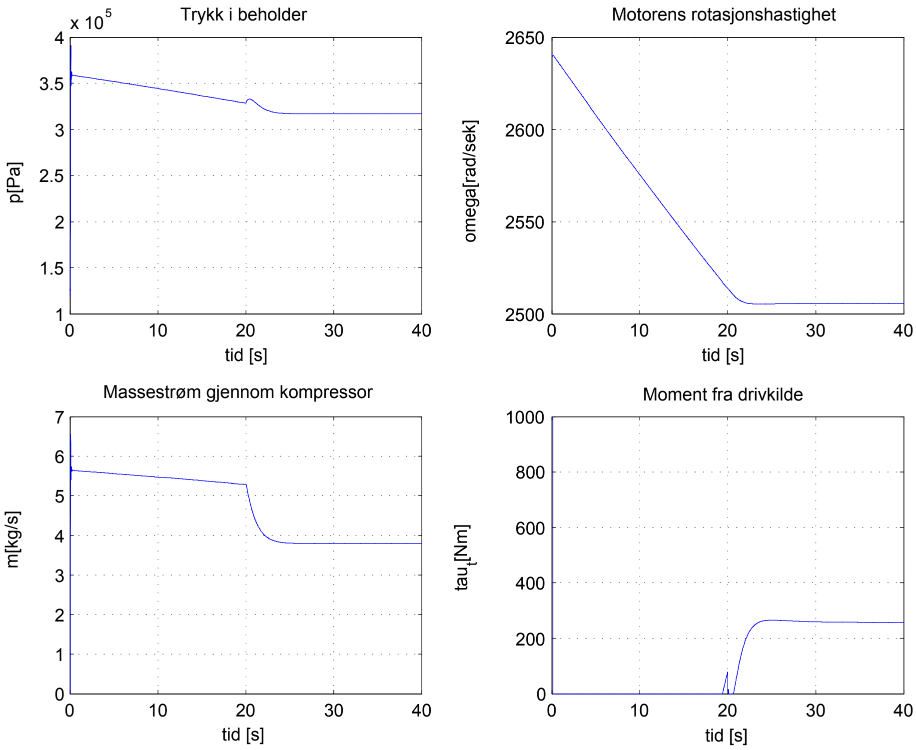
Figur 8.52: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy.

$-2.2 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$	for $p - \hat{p}$
$-0.5\,[\frac{kg}{s}]$	for $m - \hat{m}$
$0[\frac{rad}{s}]$	for $\omega - \hat{\omega}$

Videre leses stasjonæravviket mellom målinger indirekte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.52 til å være:

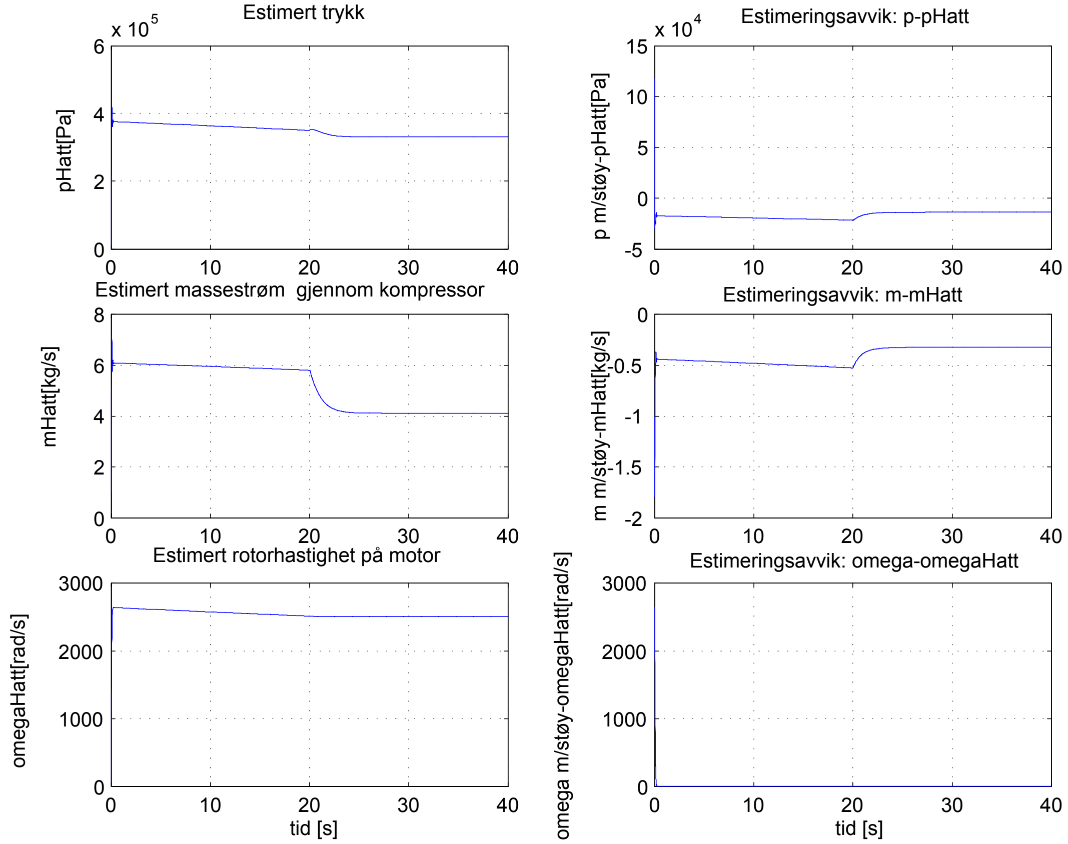
$-3.9 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$	for $p - \hat{p}$
$-0.5\,[\frac{kg}{s}]$	for $m - \hat{m}$
$-125.7[\frac{rad}{s}]$	for $\omega - \hat{\omega}$

Figur 8.52, hvor målingene ikke er påvirket av støy, avslører at estimatoren sammen med regulator ikke filtrerer bort stasjonæravviket i noen av tilstandene. $\hat{m}$ får med seg deler av stasjonæravviket til p_2, p, $\hat{p}$ og ω, mens målt m ikke er påvirket av støy i det hele tatt. Dette gjør at grafen med avviket $m - \hat{m}$ er



Figur 8.53: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av stasjonærstøy.

identisk i figur 8.52 og i figur 8.54. Ved $t = 20s$ endres ventilåpningen. Det gjør at stasjonæravviket i $m - \hat{m}$ endrer seg fra $-0.5\left[\frac{kg}{s}\right]$ til $-0.32\left[\frac{kg}{s}\right]$. Dette skjer fordi "støybidraget" fra $\hat{p}$ minker da det inntreffer et trykkfall. Trykkfallet er forårsaket av endringen i ventilåpning. Stasjonæravviket mellom p med direkte støy og $\hat{p}$ med støy er på $-2.2 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$. Stasjonæravviket mellom p med indirekte støy og $\hat{p}$ med støy er på $-3.9 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$. Det blir også gjort et hopp ved $t = 20s$ i grafen for $p - \hat{p}$ i figur 8.54, fra $-2.2 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$ til $-1.4 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$. Naturligvis inntreffer tilsvarende endringer på $0.8 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa]$ ved $t = 20s$ i avviket mellom p med indirekte støy og $\hat{p}$ med støy. Dette skjer fordi støybidraget fra $\hat{m}$ avtar. Forskjellen mellom ω uten støy og $\hat{\omega}$ med støy er $-125.7[\frac{rad}{s}]$. Stasjonæravviket mellom $p - \hat{p}$ og $m - \hat{m}$ er litt større enn ved åpen sløyfe simuleringen i kapittel 8.3.2. Dette skyldes antageligvis at estimatoren nå er koblet til regulatoren og modellen. Figur 8.52 og figur 8.54 avslører at systemet er stabilt når det utsettes for stasjonærstøy.

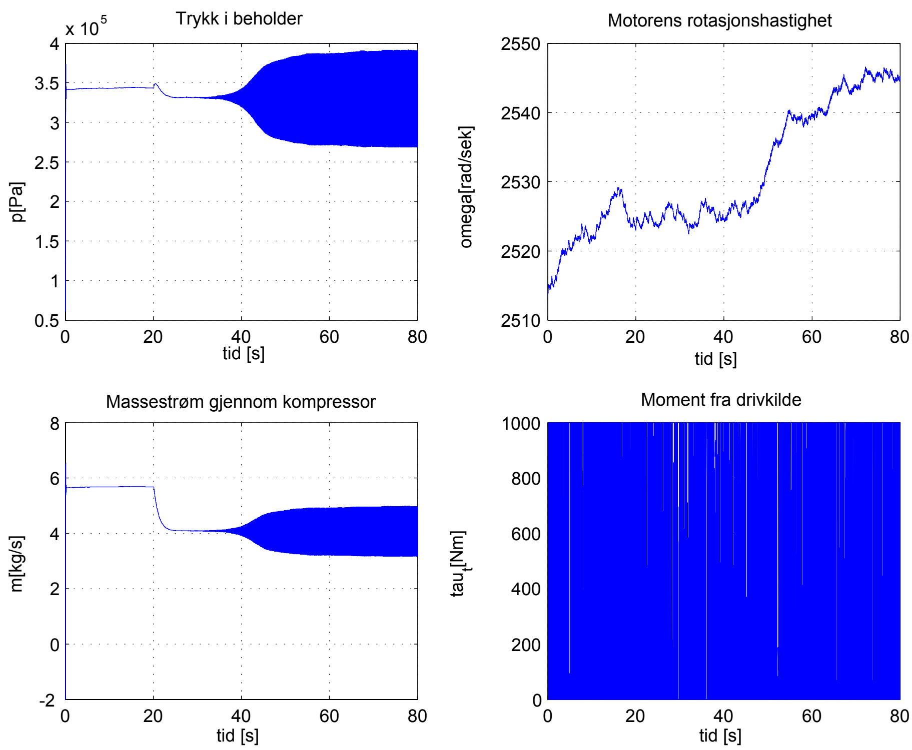


Figur 8.54: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av stasjonærstøy.

Estimerte tilstander med hvit støy

I denne simuleringen benyttes simulinkdiagrammet i figur 8.34. Siden systemet skal testes for robusthet i forhold til hvit støy blir boksen med stasjonærstøy slått av og boksen med hvit støy slått på. Hvilke målinger støyen påvirker og amplituden til støyen er nevnt i 8.3.4. Simuleringene vil i dette delkapittelet vare i $t = 80s$.

Etterhvert som simuleringen skrider mot slutten viser figur 8.55 at systemet blir ustabilt. Dette tyder på at regulatoren i samkobling med estimatoren er sensitiv til hvit støy. Figur 8.56 viser at estimatoravviket er relativt lite til tross for store svingninger i tilstandene. Siden systemet er ustabilt med de eksisterende ventilåpningene og likevektspunktene blir disse endret på. Det stabile likevektspunktet er $k_t = 0.0114$, for å bli endret til $k_t = 0.0086$ når likevektspunktet er ustabilt. Likevektspunktene til de to ventilåpningene er henholdsvis $m_{01} =$



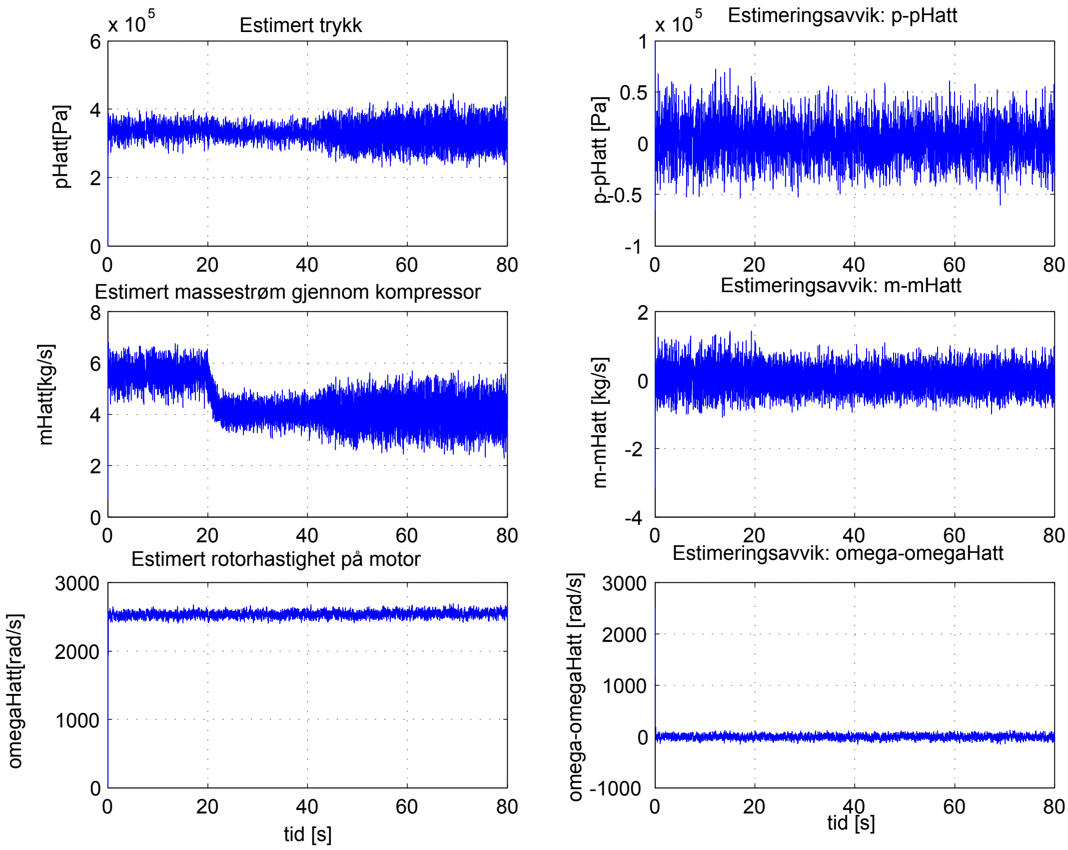
Figur 8.55: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit støy. Ustabilt.

5.604 og $m_{01} = 4.129$. Ønsket rotasjonshastighet er $N = 400[\frac{omdr}{s}]$ som tilsvarer vinkelhastigheten $\omega = 2513.3[\frac{rad}{s}]$.

Med endringene av likevektspunkter og ventilåpning har systemet blitt stabilt. Ut i fra figurene kan det konkluderes at reguleringssystemet med drivmoment vesentlig mer sårbart overfor hvit støy enn reguleringssystemet med tettkoblet ventil.

Årsaken til de store avvikene i målingene med støy på estimerte tilstandene og på målingene i figur 8.60 er at utslagene fra hver av de støyinfiserte målingene blir i verste fall summert med utslagene til hver av de estimerte tilstandene.I verste fall vil støyen på målingene og støyen på de estimerte tilstandene bli addert når avvikene mellom estimert og målt tilstand beregnes.

Likevel er utslaget nokså lite når estimerte tilstander med støy sammenlignes med målinger med indirekte støy. Mens den hvite støyen som pøses på er målingene p, ω, og p_2 er henholdsvis $(\pm 3.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa])$, $(\pm 251.3\,[\frac{rad}{s}])$ og $(\pm 3.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa])$, kan avviket mellom målinger direkte påvirket av støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.60 leses av til å være:



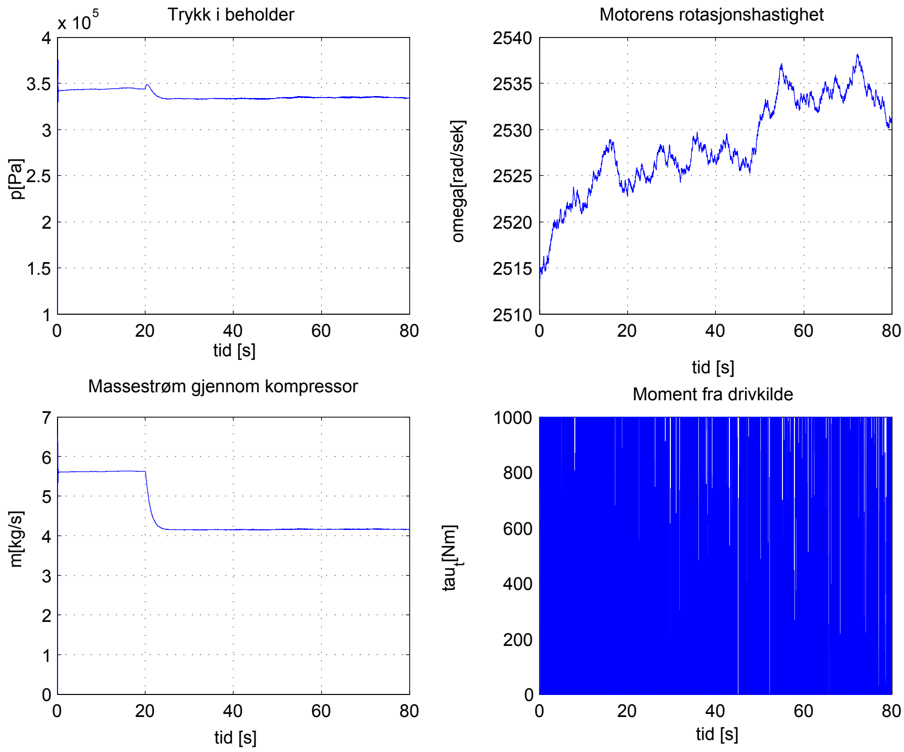
Figur 8.56: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstandene er indirekte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy. Systemet ble ustabilt.

$$\begin{array}{ll} \pm 1.0 \cdot 10\hat{\ }5\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 1.2\,[\frac{kg}{s}] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 350[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Videre leses avviket mellom målinger indirekte påvirket av støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.58 til å være:

$$\begin{array}{ll} \pm 6.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 1.2\,[\frac{kg}{s}] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 100[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

Årsaken til at forskjellen mellom m og $\hat{m}$ er lik uavhengig av målingene med direkte eller indirekte støy er at i virkeligheten kan ikke m måles og er derfor ikke belastet med støy. Det betyr at i figur 8.58 og figur 8.60 er grafene med $m - \hat{m}$ (notasjonen på figurene er m-mhatt) identiske. Som i delkapittel 8.3.2 er det



Figur 8.57: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit støy.

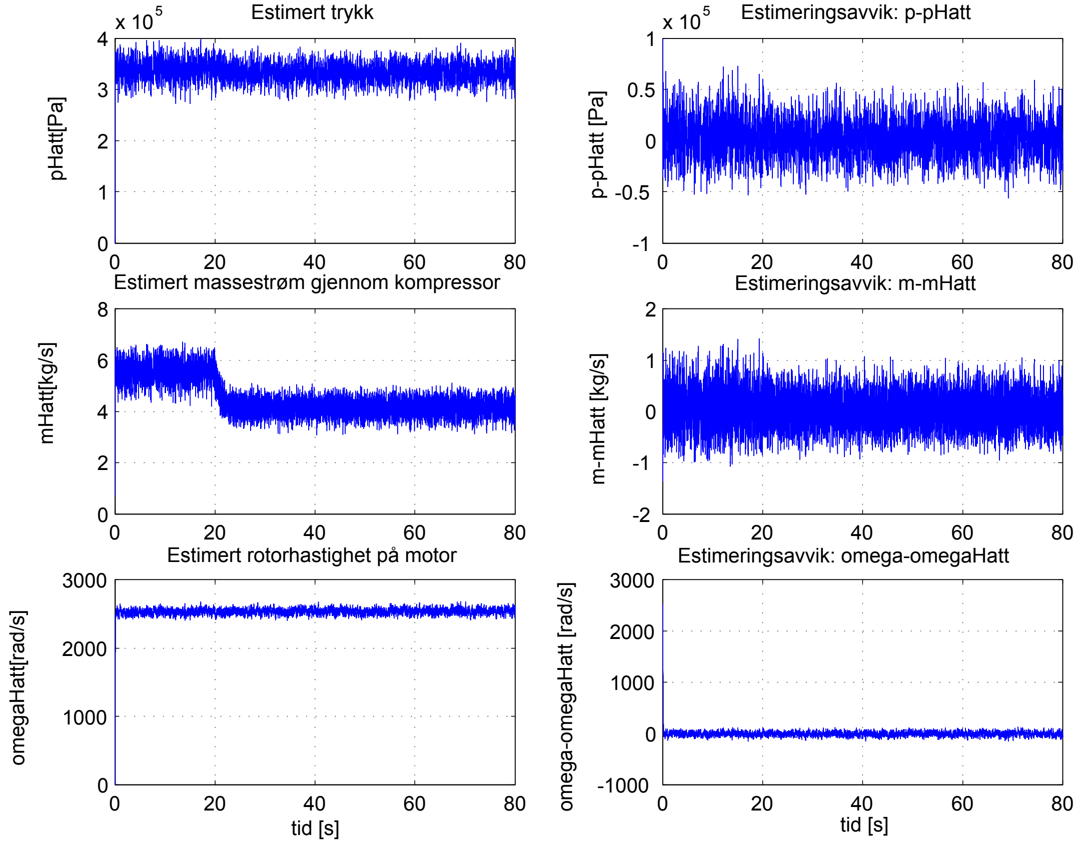
interessant å se at det er betydelig høyere avvik på systemet med regulering ved drivmoment enn på systemet med regulering med tettkoblet ventil for alle tilstander. Forskjellen mellom avvikene til estimatoren for regulering med drivmoment og estimatoren for regulering med tettkoblet ventil er:

$$\begin{array}{ll} \pm 5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 0.7\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 90[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

I figur 8.55, figur 8.57 og figur 8.59 er det mulig å observere at drivkilden er ekstremt raskt. Momentet fra drivkilden endrer seg svært hurtig og drivkilden ser ut til å være svært fleksibel. Det er urealistisk at en drivkilde skal fungere så hurtig og fleksibelt som den virker i figur 8.55, figur 8.57 og figur 8.59.

Estimerte tilstander med hvit støy og stasjonær støy

I denne simuleringen er både boksen med stasjonærstøy og boksen med hvit støy slått på i simulinkdiagrammet på figur 8.34. Simuleringene varer over $t = 80s$.

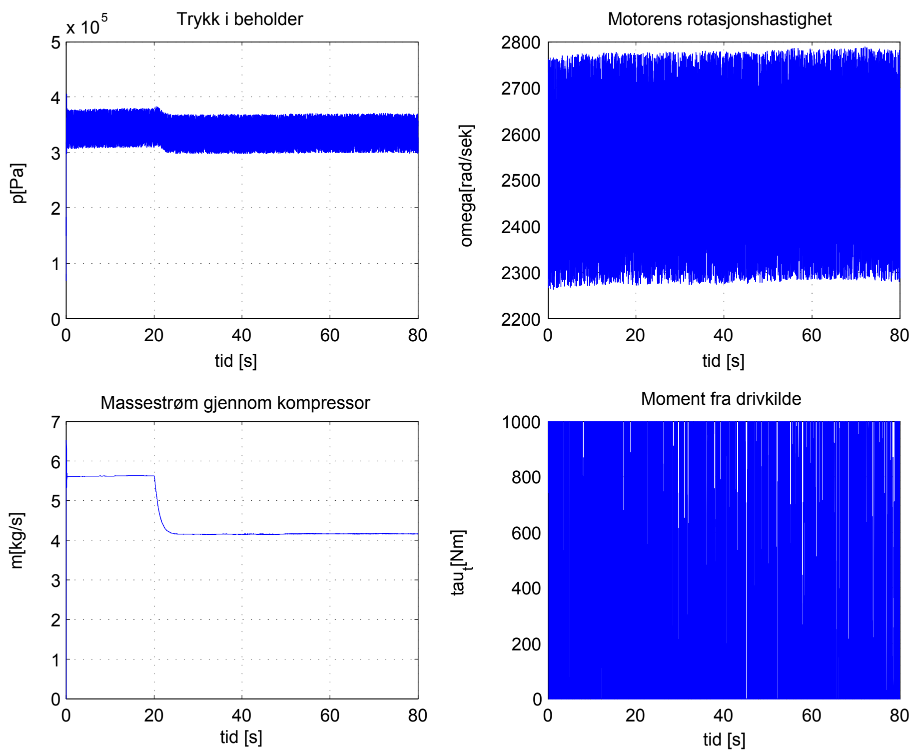


Figur 8.58: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy.

Figur 8.61 viser at med positivt stasjonæravvik er systemet stabilt til tross at det blir benyttet samme ventilåpninger og likevektspunkter som i simuleringen med hvit støy hvor det viste seg at systemet var ustabilt. For å teste ut systemet endres den positive stasjonære støyen til å bli negativ stasjonær støy med et utslag på 5% av tilstandene p_2, p og ω.

Figur 8.62 og figur 8.63 viser at med negativt stasjonæravvik er systemet ustabilt med de eksisterende likevektspunkter og ventilåpninger. De nye ventilåpningene som benyttes er $k_t = 0.0116$ for stabilt likevektspunkt, for å bli endret til $k_t = 0.0088$ når likevektspunktet er ustabilt. Likevektspunktene til de to ventilåpningene er henholdsvis $m_{01} = 5.69$ og $m_{01} = 4.25$. Ønsket rotasjonshastighet er $N = 400[\frac{omdr}{s}]$ som tilsvarer vinkelhastigheten $\omega = 2513.3[\frac{rad}{s}]$. Figur 8.64 og figur 8.66 viser at systemet nå er stabilt.

Stasjonærvviket mellom målinger med direkte støy og estimerte tilstander med



Figur 8.59: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av hvit støy.

støy fra figur 8.67 leses av til å være:

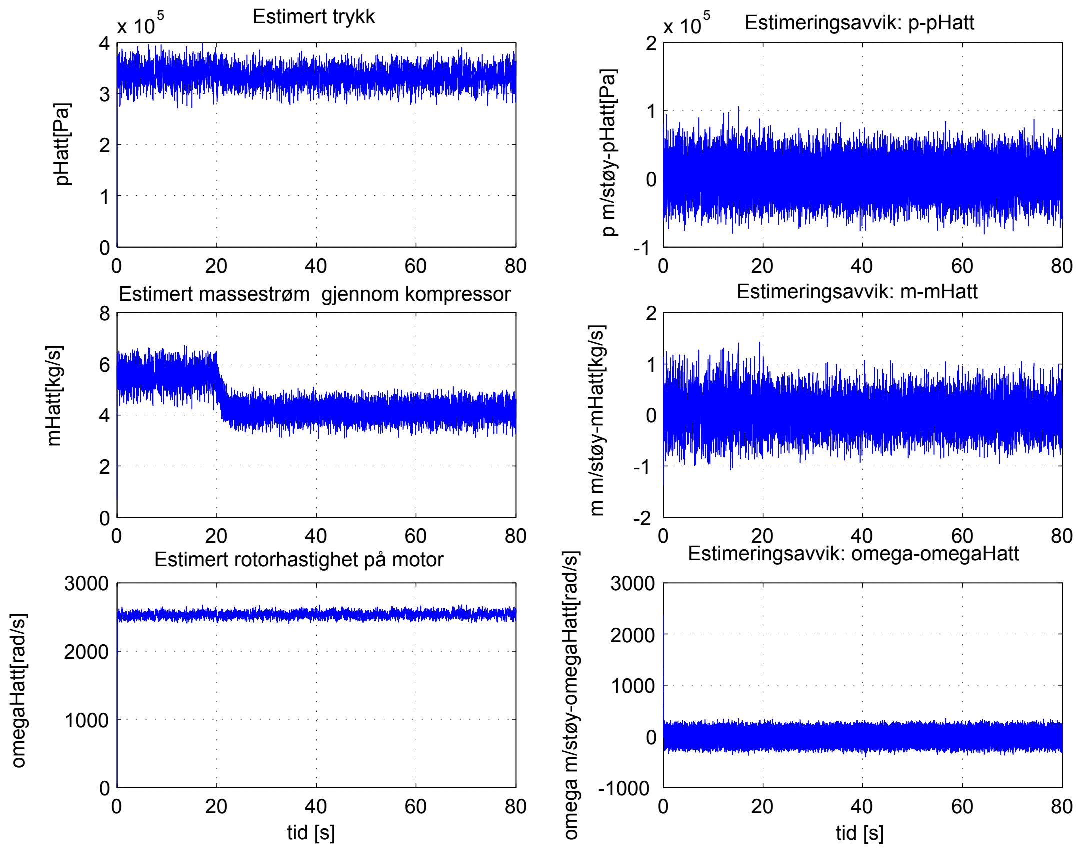
$$
\begin{array}{ll}
2.2 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
0[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}
\end{array}
$$

Og stasjonæravviket mellom målinger med indirekte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.65 til å være:

$$
\begin{array}{ll}
3.9 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
0.5\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
125.7[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}
\end{array}
$$

Som tidligere nevnt legger den hvite støyen seg oppå stasjonærstøyen, slik at avviket mellom målinger med direkte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.67 leses av til å være:

$$
\begin{array}{ll}
\pm 1.0 \cdot 10\hat{}4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\
\pm 1.2\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\
\pm 350[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega},
\end{array}
$$

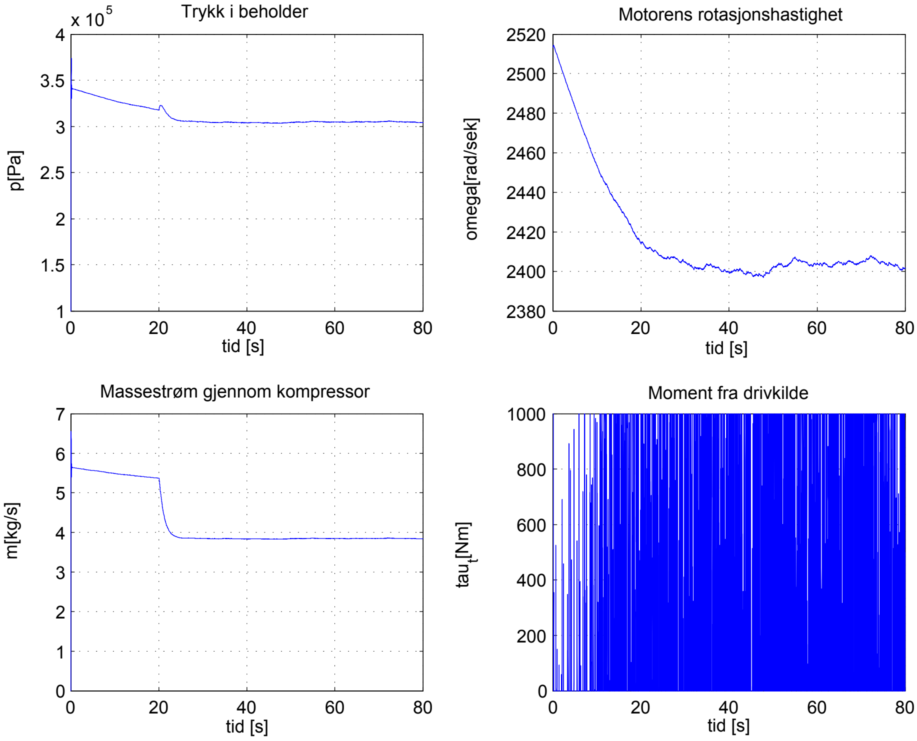


Figur 8.60: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit støy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit støy.

med stasjonæravviket som middelverdi. Videre leses avviket mellom målinger med indirekte støy og estimerte tilstander med støy fra figur 8.65 til å være:

$$\begin{array}{ll} \pm 6.5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 1.2\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 100[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega}, \end{array}$$

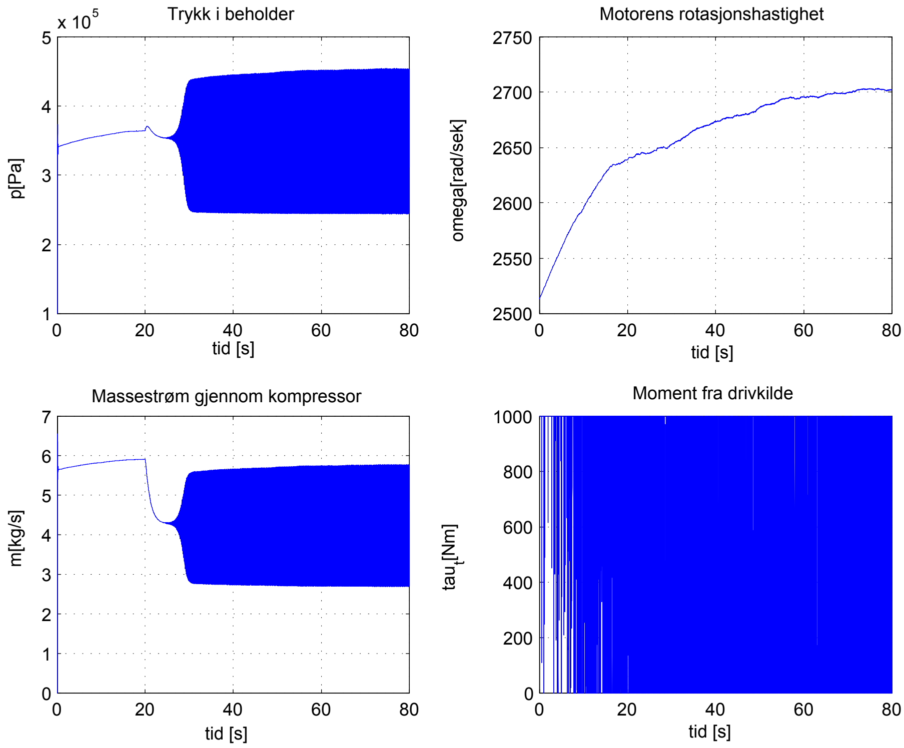
med stasjonæravviket som middelverdi. Det samme mønsteret som observeres i simuleringene med bare stasjonærstøy og bare hvit støy gjentar seg. Det vil si at estimatoren klarer ikke å eliminere stasjonæravviket og har en viss evne til å filtrere bort deler av den hvite støyen.Som i delkapittelet 8.3.2 kan man observere at det er betydelig høyere avvik på systemet med regulering ved drivmoment enn på systemet med regulering med tettkoblet ventil for alle tilstander. Forskjellen mellom avvikene til systemet med regulering med drivmoment og systemet med regulering med tettkoblet ventil er:



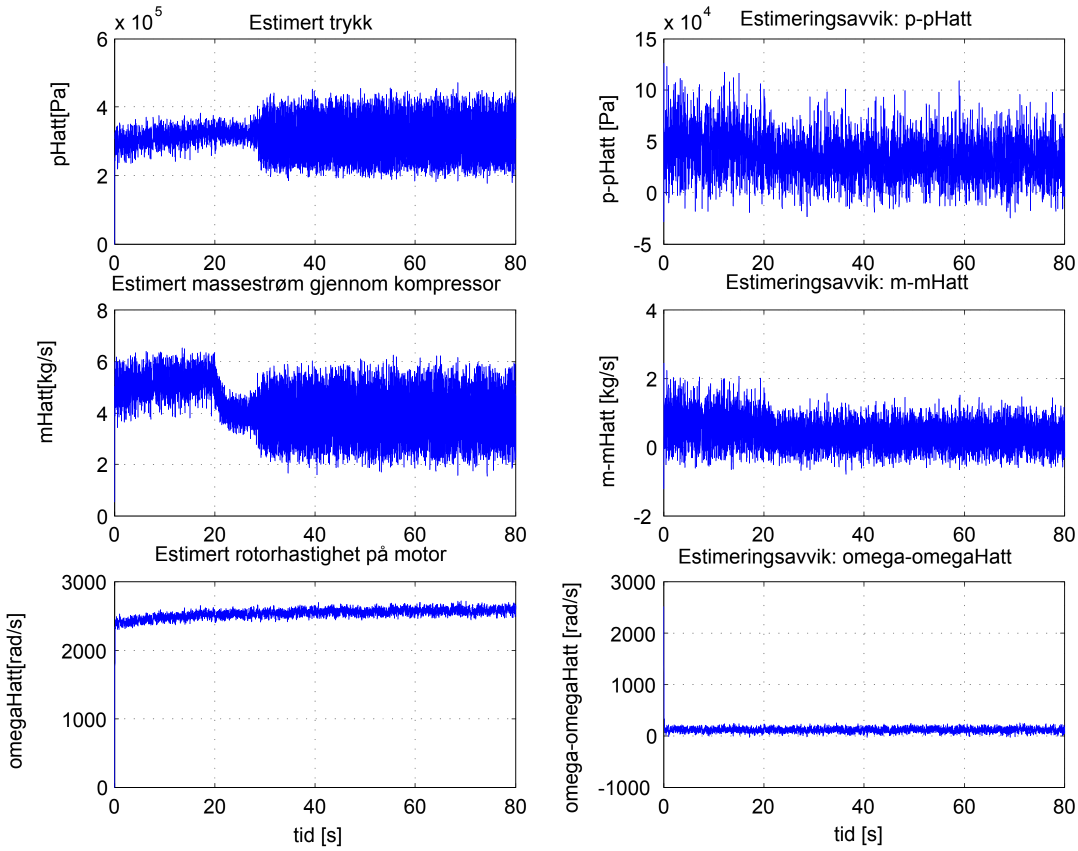
Figur 8.61: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit og stasjonærstøy.

$$\begin{array}{ll} \pm 5 \cdot 10\hat{\ }4\,[Pa] & \text{for } p - \hat{p} \\ \pm 0.7\,\left[\frac{kg}{s}\right] & \text{for } m - \hat{m} \\ \pm 90[\frac{rad}{s}] & \text{for } \omega - \hat{\omega} \end{array}$$

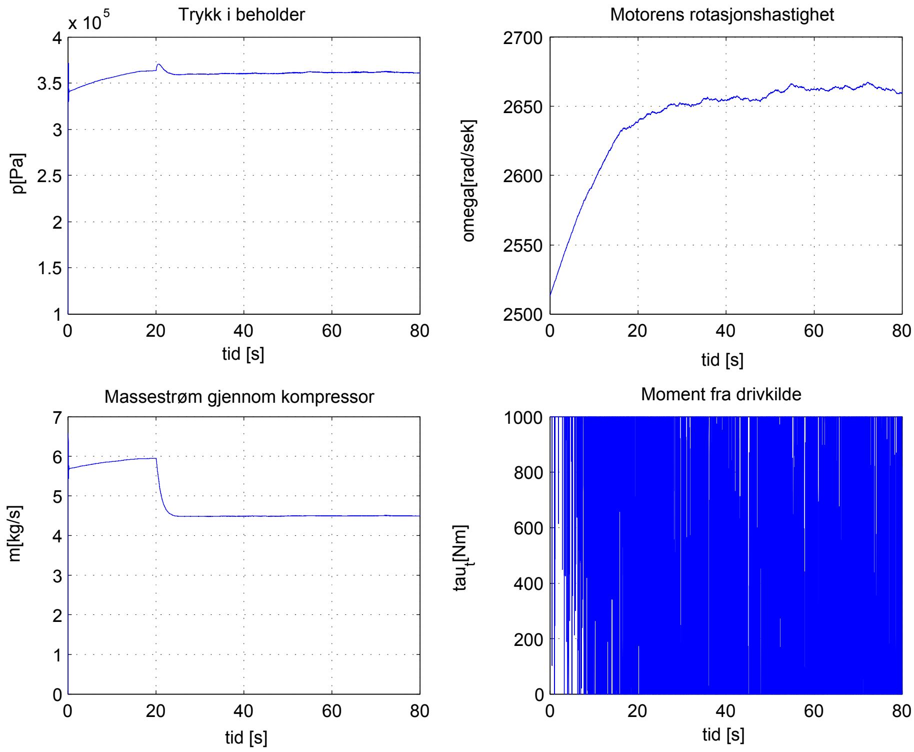
I figur 8.61, figur 8.62, figur 8.64 og figur 8.66 er det mulig å observere at drivkilden er ekstremt raskt. Momentet fra drivkilden endrer seg svært hurtig og drivkilden ser ut til å være svært fleksibel. Det er urealistisk at en drivkilde skal fungere så hurtig og fleksibelt som den virker i figur 8.61, figur 8.62, figur 8.64 og figur 8.66.



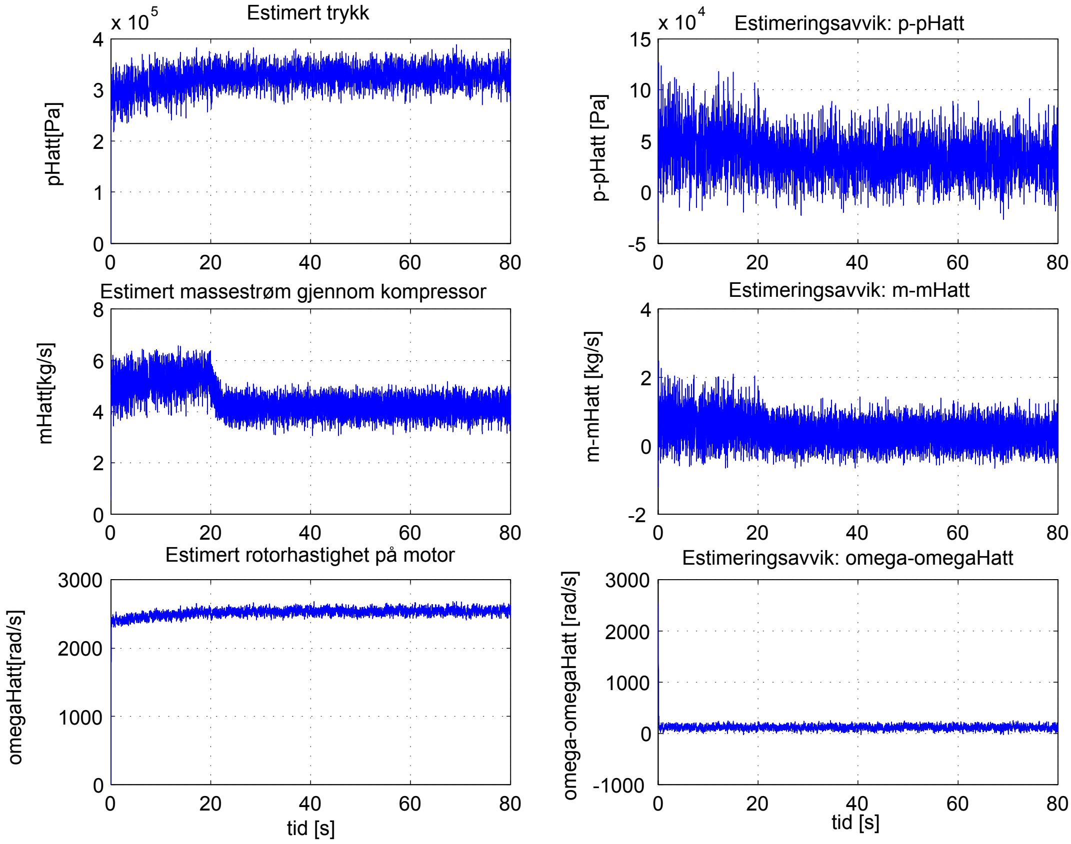
Figur 8.62: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit og stasjonærstøy. Ustabilt



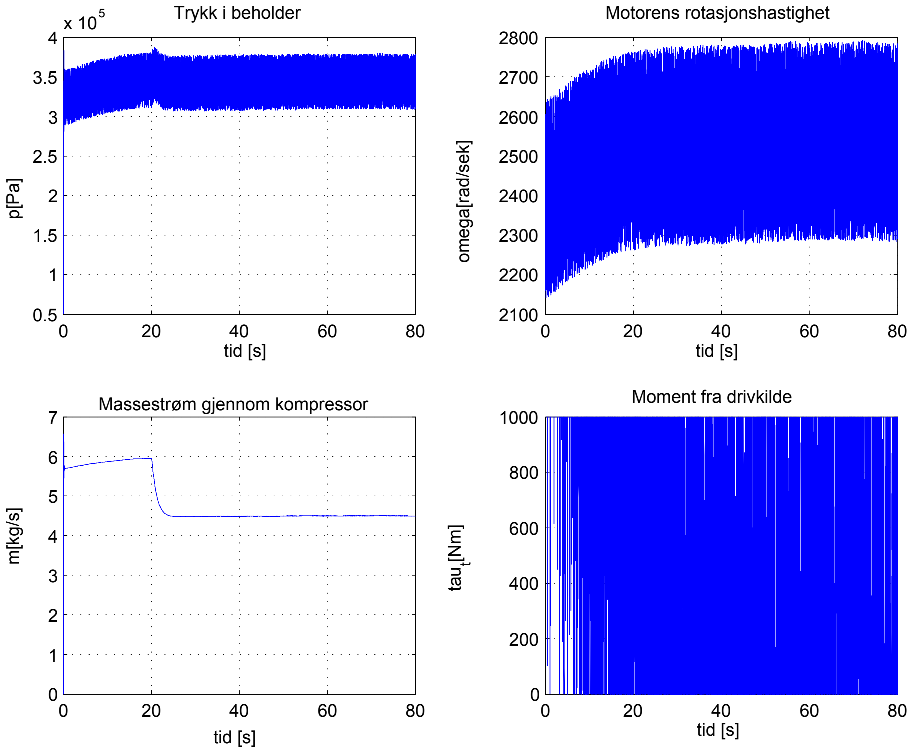
Figur 8.63: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy. Ustabilt.



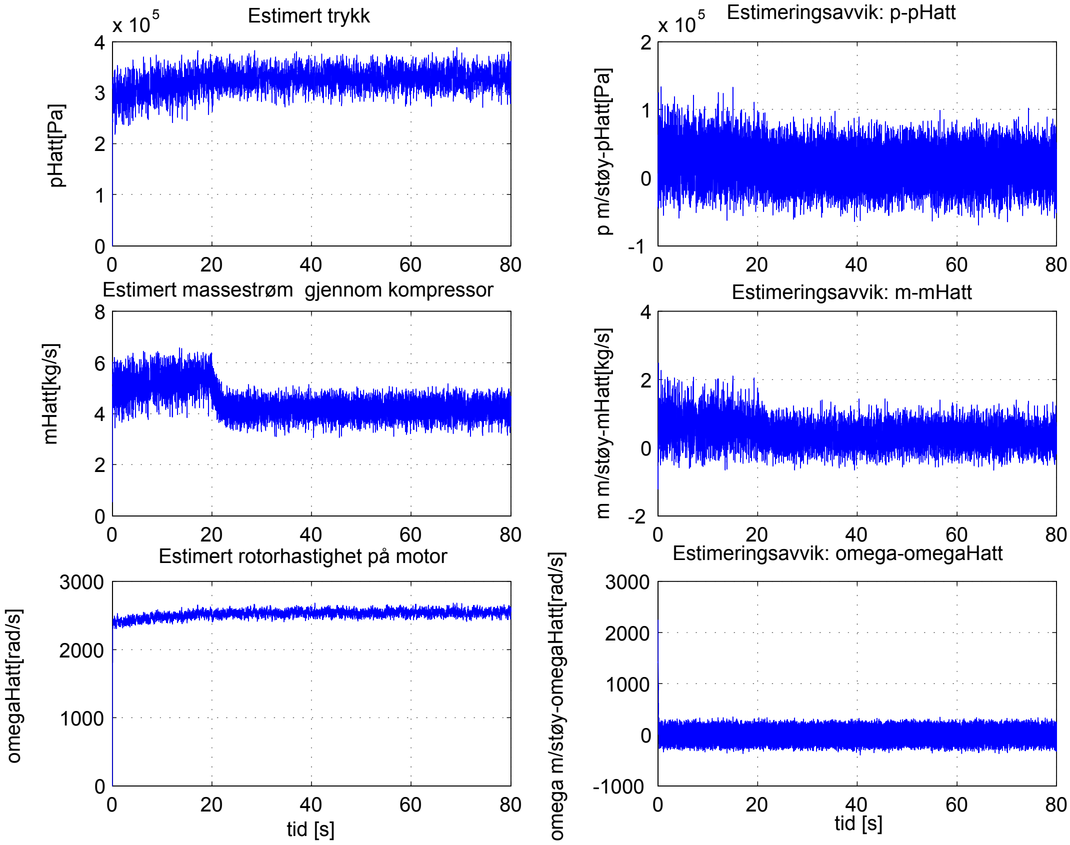
Figur 8.64: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med indirekte påvirkning av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.65: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er indirekte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.66: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Tilstandsforløp med direkte påvirkning av hvit og stasjonærstøy.



Figur 8.67: Simulering med drivmoment, lukket sløyfe: Grafer med $\hat{p}$, $\hat{m}$ og $\hat{\omega}$, med tilhørende estimeringsavvik. Tilstander er direkte påvirket av hvit og stasjonærstøy. Estimerte tilstander er påvirket av hvit og stasjonærstøy.

Kapittel 9

Konklusjon og videre arbeid

Ved hjelp av kontraksjonsteori ble det vist at begge estimatorene designet i [3] er inkrementelt globalt eksponentielt stabile. De to nye full state tilstands-estimatorene har også blitt vist å være inkrementelt globalt ektponentielt stabile. Begge disse resultatene har blitt bekreftet ved hjelp av simuleringer. Simuleringene viste at full state tilstandsestimatoren for regulering med drivmoment hadde noe høyere avvik ved hvit støy enn fullstate tilstandsestimatoren for regulering med tettkoblet ventil.

Simuleringene viste også at full state estimatoren for regulering med tettkoblet ventil sammenkoblet med regulatoren var stabil. Systemet viste seg imidlertid å være ustabilt da fullstate estimatoren for regulering med drivmoment ble koblet sammen med sin respektive regulator. Denne sammensetningen viste seg å være svært sårbar overfor hvit støy og negativ stasjonærstøy. I [3] ble det konkludert at modellen, som har blitt brukt i simuleringene i denne oppgaven, er svært sensitiv med hensyn på integreringsmetode. Dette kan ha vært årsaken til ustabiliteten som åpenbarte seg i simuleringene hvor full state estimatoren for regulering med drivmoment var sammenkoblet med sin respektive regulator. I simuleringene ble det heller ikke lagt noen begrensninger på drivkilden. Dette har gjort at drivkilden har vært vesentlig raskere i simuleringene enn man kan forvente virkeligheten. Med tanke på videre arbeid ville det være fornuftig å pålegge drivkilden i simuleringene realistiske begrensninger.

I denne avhandlingen har kontraksjonsteorien kun blitt brukt til å analysere stabiliteten til tilstandsestimatorer. Som videre arbeid ville det være interessant å gjøre et forsøk på å bruke kontraksjonsteori i en stabilitetsanalyse av regulatorene som er presentert i denne avhandlingen, og ikke minst i en stabilitetsanalyse av regulatorene sammen med estimatorene. Det kunne også være interessant å bruke kontraksjonsteori til å utvikle nye regulatorer.

En svakhet ved samtlige estimatorer presentert i denne avhandlingen er at alle sammen benytter seg av en variabel z for å gjøre estimatorene implementerbare.

Denne variabelen har som formål å gjøre estimatorene uavhengig av målingen m. Bruken av variabelen z forutsetter perfekt kunnskap om modellen. Det kunne derfor være nyttig å utvikle nye estimatorer som ikke er avhengige av god kunnskap om modellen.

Bibliografi

[1] E.M.Greitzer. Surge and Rotating Stall in Axial Flow Compressors, part i: Theoretical Compression System Modell. Technical report, Journal of Engineering for Power, 98, 190-198, 1976.

[2] J.T.Gravdahl, O.Egeland and S.Vatland. Drive Torque Actuation in Active Surge Control of Centrifugal Compressors. *Accepted for publication as regular paper in Automatica*, 2002.

[3] B.Bøhagen. Estimatordesign og aktiv regulering av surge for sentrifugalkompressorer. Norges Teknisk-Naturvitenskaplige Universitet, Institutt for teknisk kybernetikk, 2002.

[4] O.Stene. Estimering av massestrøm for bruk i aktiv regulering av surge i sentrifugalkompressorer. Norges Teknisk-Naturvitenskaplige Universitet, 2003.

[5] J.T.Gravdahl, O.Egeland and S.Vatland. Active Surge Control of Centrifugal Compressors Using Drive Torque. *IEEE Conference on Decision and Control, 2001.*

[6] A.Robertson. *On Observer Based Control of Nonlinear Systems.* Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1999.

[7] E.Panteley and A.Loria. Growth Rate Conditions for Uniform Asymptotic Stability of Cascaded Time-varying Systems. *Automatica,* 37:453-460, 2001. Brief Paper.

[8] J.J.E.Slotine and W.Li. *Applied Nonlinear Control.* Prentice Hall, 1991.

[9] H.K.Khalil. *Nonlinear Systems.* Prentice Hall, third edition, 2002.

[10] A.E.Nisenfeld. Centrifugal Compressors: Principles of Operation and Control. Technical report, Instrument society of America, 1982.

[11] K.Ogata. *Discrete-Time Control Systems.* Prentice Hall, second edition, 1995.

[12] Chi-Tsong Chen. *Linear Systems Theory and Design.* Oxford University Press, second edition, 1999.

[13] W.Lohmiller. Contraction analysis for nonlinear systems. Ph.D dissertation, Dep. Mechanical Eng., M.I.T., Cambridge, Massachusetts, 1999

[14] W.Lohmiller and J.J.E.Slotine. On Metric Observers for Nonlinear Systems. *IEEE Conference on Control Applications, 1996.*

[15] W.Lohmiller and J.J.E.Slotine. On Metric Controllers and Observers for Nonlinear Systems. *35th Conference on Decision and Control, 1996.*

[16] W.Lohmiller and J.J.E.Slotine. On Contraction Analysis for Nonlinear Systems. *Automatica,* 34(6):683-696, 1998.

[17] W.Lohmiller and J.J.E.Slotine. Nonlinear Process Control Using Contraction Analysis. *AIChE Journal,* 46(3):588-596, 2000.

[18] J.Jouffroy and J.Lottin. Integrator Backstepping Using Contraction Theory: A Brief Methological Note. *IFAC World Congress, 2002.*

[19] J.Jouffroy and J.Lottin. On the Use of Contraction Theory for the Design of Nonlinear Observers for Ocean Vehicles. *Proc. American Control Conference, 2002.*

[20] J.Jouffroy and J.J.E Slotine. Methodical Remarks on Contraction Theory. *submitted to Automatica as a Regular paper, 2004.*

[21] C.H. Edwards and D.E. Penney. *Elementary Linear Algebra.* Prentice Hall, 1988.

[22] C.H. Edwards and D.E. Penney. *Calculus with analytic geometry.* Prentice Hall, 1998.

Tillegg A

Stabilitetsteori

A.1 Stabilitetsteori

Theorem 8 *(Theorem 3.3, [8])*
Anta at det finnes en skalar funksjon V til tilstanden x, som er kontinuerlig førsteordens deriverbar slik at

- $V(x)$ *er positivt definitt*
- $\dot{V}(x)$ *er negativt definitt*
- $V(x) \to \infty$ *når* $\|x\| \to \infty$

  da er likevektspunktet i origo globalt asymptotisk stabilt.

Tillegg B

Grenseverdier

Funksjonen er en del av den partiellderiverte $\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1}$ som er tatt fra kapittel 7.3:

$$f(x_1) = \frac{\tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta}) \left(\left(1 - \tanh^2(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta})\right) (x_1 - p_{01}) + \tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta}) \right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1 - p_{01}}{\delta}) \, (x_1 - p_{01})}} \tag{B.1}$$

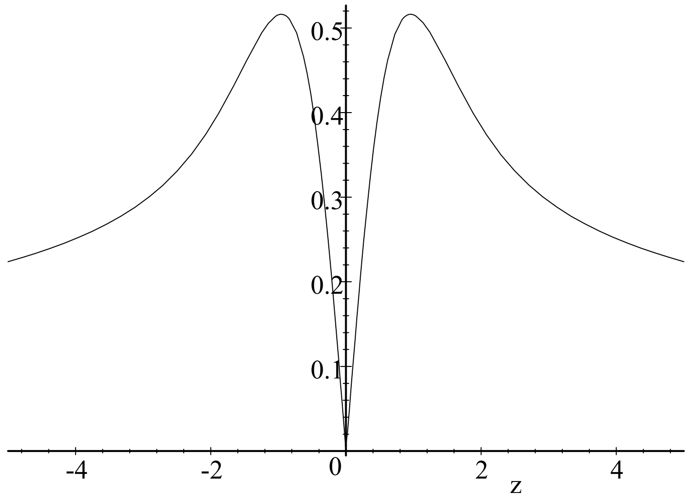
Setter $\delta = 1$, og $x_1 - p_{01} = z$, slik i stedet for å beregne $\lim_{\hat{p} \to p_{01}} f(\hat{p})$, blir den ekvivalente grenseverdien $\lim_{z \to 0} f(z)$ beregnet. Med disse endringene blir funksjonen seende slik ut:

$$f(z) = \frac{\tanh(z) \left(\left(1 - \tanh^2(z)\right) z + \tanh(z) \right)}{2\sqrt{z \tanh(z)}} \tag{B.2}$$

Grafen til funksjonen er:
Utrykket for grenseverdien som skal bli funnet er:

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\tanh(z) \left(\left(1 - \tanh^2(z)\right) z + \tanh(z) \right)}{2\sqrt{z \tanh(z)}} \tag{B.3}$$

Utregningen er som følger:



Figur B.1: Grafen til $f\left(z\right)$

$$
\begin{aligned}
& \lim_{z\to 0} \frac{\tanh(z)\left(\left(1-\tanh^2(z)\right)z+\tanh(z)\right)}{2\sqrt{z\tanh(z)}} \\
= & \lim_{z\to 0} \frac{z\tanh(z)\left(1-\tanh^2(z)+\frac{1}{z}\tanh(z)\right)}{2\sqrt{z\tanh(z)}} \\
= & \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}\sqrt{z\tanh(z)}\left(1-\tanh^2(z)+\frac{1}{z}\tanh(z)\right) \\
= & \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}\sqrt{z\tanh(z)} - \lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\sqrt{z\tanh(z)}\tanh^2(z) \\
& +\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\sqrt{z\tanh(z)}\frac{1}{z}\tanh(z)
\end{aligned} \tag{B.4}
$$

I det oppdelte grenseverdiutrykket i utrykk (B.4) går:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\sqrt{z\tanh(z)} \rightarrow 0 \tag{B.5}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\sqrt{z\tanh(z)}\tanh^2(z) \rightarrow 0 \tag{B.6}$$

Den siste grenseverdien i utrykk (B.4) går:

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\sqrt{z\tanh(z)}\frac{1}{z}\tanh(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2}\frac{\tanh(z)\sqrt{\tanh(z)}}{\sqrt{z}}$$

Bruker l'hôpitals regel, se Tillegg D, og får:

$$
\begin{aligned}
& \lim_{z\to 0} \frac{1}{2} \frac{\left(1-\tanh^2(z)\right)\sqrt{\tanh(z)} + \frac{\tanh(z)\left(1-\tanh^2(z)\right)}{2\sqrt{\tanh(z)}}}{\frac{1}{2\sqrt{z}}} \\
= & \lim_{z\to 0} \sqrt{z}\left(\left(1-\tanh^2(z)\right)\sqrt{\tanh(z)} + \frac{1}{2}\sqrt{\tanh(z)}\left(1-\tanh^2(z)\right)\right) \\
= & \lim_{z\to 0} \sqrt{z}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\tanh(z)}\left(1-\tanh^2(z)\right)\right) \to 0 \qquad \text{(B.7)}
\end{aligned}
$$

Siden utrykkene (B.5)-(B.7) går mot null når z går mot null betyr det at:

$$
\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\tanh(z)\left(\left(1-\tanh^2(z)\right)z + \tanh(z)\right)}{2\sqrt{z\tanh(z)}} \to 0 \qquad \text{(B.8)}
$$

Forøvrig er det verdt å nevne at grenseverdiene $\lim_{z\to 0^+} f(z)$ og $\lim_{z\to 0^-} f(z)$ blir:

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 0^+} f(z) &= \lim_{z\to 0^+} \frac{\tanh(z)\left(\left(1-\tanh^2(z)\right)z + \tanh(z)\right)}{2\sqrt{z\tanh(z)}} \to 0 \\
\lim_{z\to 0^-} f(z) &= \lim_{z\to 0^-} \frac{\tanh(z)\left(\left(1-\tanh^2(z)\right)z + \tanh(z)\right)}{2\sqrt{z\tanh(z)}} \to 0
\end{aligned}
$$

Tillegg C

Beregninger til stabilitetsanalyse

C.1 Full state tilstandsestimator for regulering med tettkoblet ventil

De partiellderiverte av det virtuelle systemet i kapittel 7.3.1 er:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= -\Bigg(\bigg(\Big(1-\tanh^2(\tfrac{x_1-p_{01}}{\delta})\Big)\, k_t\sqrt{\tanh(\tfrac{x_1-p_{01}}{\delta})\,(x_1-p_{01})}\bigg) \\
&\quad + \frac{k_t\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\Big(\big(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\big)(x_1-p_{01})+\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\Big)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})(x_1-p_{01})}}\Bigg) - k_{\tilde{p}} \\
\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= \frac{a_{01}^2}{V_p} \\
\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= -\frac{A_1}{L_c} \\
\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= -k_{\tilde{m}} \\
\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} &= 0 \\
\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} &= 0 \\
\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} &= -x_3\left(\sigma r_2^2\tanh(\tfrac{x_2}{\delta}) + \sigma r_2^2\left(1-\tanh^2(\tfrac{x_2}{\delta})\right)x_2\right) \\
\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} &= -\sigma r_2^2\tanh(\tfrac{x_2}{\delta})x_2 - k_{\tilde{\omega}1} - 3k_{\tilde{\omega}2}x_3^2
\end{aligned}
$$

For enkelhets skyld skrives utrykkene til de partiellderiverte, som ikke er lik null, som følgende:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} &= -a_1(x_1,x_2,x_3) \\
\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} &= a_2(x_1,x_2,x_3) \\
\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} &= -b_1(x_1,x_2,x_3) \\
\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} &= -b_2(x_1,x_2,x_3) \\
\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} &= -c_2(x_1,x_2,x_3) \\
\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} &= -c_3(x_1,x_2,x_3)
\end{aligned}
$$

For notasjons skyld blir jacobienmatrisen kalt $A(x_1,x_2,x_3)$. Det betyr at jacobienmatrisen er

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= A\left(x_1, x_2, x_3\right) \\
&= \begin{bmatrix} -a_1\left(x_1, x_2, x_3\right) & a_2\left(x_1, x_2, x_3\right) & 0 \\ -b_1\left(x_1, x_2, x_3\right) & -b_2\left(x_1, x_2, x_3\right) & 0 \\ 0 & -c_2\left(x_1, x_2, x_3\right) & -c_3\left(x_1, x_2, x_3\right) \end{bmatrix} \\
\frac{\partial f}{\partial x}^T &= A^T\left(x_1, x_2, x_3\right) \\
&= \begin{bmatrix} -a_1\left(x_1, x_2, x_3\right) & -b_1\left(x_1, x_2, x_3\right) & 0 \\ a_2\left(x_1, x_2, x_3\right) & -b_2\left(x_1, x_2, x_3\right) & c_2\left(x_1, x_2, x_3\right) \\ 0 & 0 & -c_3\left(x_1, x_2, x_3\right) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

For at estimatoren skal være globalt kontraherende har man fra kontraksjonsteori følgende krav:

$$
\frac{\partial f}{\partial x}^T M + \dot{M} + M\frac{\partial f}{\partial x} < -2\beta_M M, \tag{C.1}
$$

hvor $\beta_M > 0$, M er en symmetrisk positiv metrikk med konstanter og $\frac{\partial f}{\partial x} = A\left(x_1, x_2, x_3\right)$. Metrikken M blir :

$$
M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}
$$

Bruker (C.1) og får følgende:

$$
\begin{aligned}
G\left(x_1, x_2, x_3\right) &= A^T\left(x_1, x_2, x_3\right) M + MA\left(x_1, x_2, x_3\right) \\
G\left(x_1, x_2, x_3\right) &= \left[\begin{array}{cc} -2a_1\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{11} & \cdots \\ -b_1\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{22} + a_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{11} & \cdots \\ 0 & \cdots \end{array}\right. \\
&\left.\begin{array}{ccc} \cdots & -b_1\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{22} + a_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{11} & 0 \\ \cdots & -2b_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{22} & -c_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{33} \\ \cdots & -c_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{33} & -2c_3\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{33} \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

For å finne ut om $A^T\left(x_1, x_2, x_3\right) M + MA\left(x_1, x_2, x_3\right) < -2\beta_M M$ benyttes teorem 9. For enkelhets skyld settes $b_1\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{22} = a_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{11}$ slik at:

$$
G\left(x_1, x_2, x_3\right) = \begin{bmatrix} -2a_1\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -2b_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{22} & -c_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{33} \\ 0 & -c_2\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{33} & -2c_3\left(x_1, x_2, x_3\right) m_{33} \end{bmatrix}
$$

Med bruk av teorem 9 blir:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= -2a_1\left(x_1,x_2,x_3\right)m_{11}\\
&= -2\left(\left(\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)k_t\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(x_1-p_{01}\right)}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{k_t\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)\left(x_1-p_{01}\right)+\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(x_1-p_{01}\right)}}\right)+k_{\tilde{p}}\right)m_{11}\\
\Delta_1 &\leq -k_p m_{11} < 0\\
\Delta_2 &= 4a_1\left(x_1,x_2,x_3\right)m_{11}b_2\left(x_1,x_2,x_3\right)m_{22}\\
&= 4\left(\left(\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)k_t\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(x_1-p_{01}\right)}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{k_t\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)\left(x_1-p_{01}\right)+\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(x_1-p_{01}\right)}}\right)+k_{\tilde{p}}\right)m_{11}\left(k_{\tilde{m}}m_{22}\right)\\
\Delta_2 &\geq k_{\tilde{m}}k_p m_{11}m_{22} > 0\\
\Delta_3 &= -2a_1\left(x_1,x_2,x_3\right)m_{11}\left(4b_2\left(x_1,x_2,x_3\right)m_{22}c_3\left(x_1,x_2,x_3\right)m_{33}-\left(c_2\left(x_1,x_2,x_3\right)m_{33}\right)^2\right)\\
&= -2\left(\left(\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)k_t\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(x_1-p_{01}\right)}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{k_t\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)\left(x_1-p_{01}\right)+\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(x_1-p_{01}\right)}}\right)+k_{\tilde{p}}\right)m_{11}\\
&\quad\left(4\left(-k_{\tilde{m}}m_{22}\right)\left(-\sigma r_2^2\tanh(\frac{x_2}{\delta})x_2-k_{\tilde{\omega}1}-3k_{\tilde{\omega}2}x_3^2\right)m_{33}\right.\\
&\quad\left.-x_3^2m_{33}^2\left(\sigma r_2^2\tanh(\frac{x_2}{\delta})+\sigma r_2^2\left(1-\tanh^2(\frac{x_2}{\delta})\right)x_2\right)^2\right)\\
\Delta_3 &\leq -k_{\tilde{\omega}1}k_{\tilde{m}}k_p m_{11}m_{22}m_{33} < 0
\end{aligned}
$$

For at $\Delta_3 \leq -k_{\tilde{\omega}1}k_{\tilde{m}}k_p m_{11}m_{22}m_{33} < 0$
må $12k_{\tilde{m}}m_{22}k_{\tilde{\omega}2} \geq \sup\left(m_{33}\left(\sigma r_2^2\tanh(\frac{x_2}{\delta})+\sigma r_2^2\left(1-\tanh^2(\frac{x_2}{\delta})\right)x_2\right)^2\right)$. Hvis $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ og $\Delta_3 < 0$ er matrisen $G\left(x_1,x_2,x_3\right)$ negativt definitt. Hvis $G\left(x_1,x_2,x_3\right) < -2\beta_M M$, hvor $\beta_M > 0$, er systemet globalt kontraherende. Dette kravet er innfridd. Det betyr at $x = [p,m,\omega]$ og $x = [\hat{p},\hat{m},\hat{\omega}]$ konvergerer eksponentielt mot hverandre. Tilstandsestimatoren for regulering med tettkoblet ventil er dermed inkrementel globalt ekponentielt stabil.

C.2 Full state tilstandsestimator for regulering med drivmoment

De partiellderiverte av det virtuelle systemet i kapittel 7.3.2 er:

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -\left(\left(\left(1-\tanh^2(\tfrac{x_1-p_{01}}{\delta})\right) k_t\sqrt{\tanh(\tfrac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(x_1-p_{01}\right)}\right) + \frac{k_t \tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)(x_1-p_{01})+\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})(x_1-p_{01})}}\right) - k_{\tilde{p}}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = \frac{a_{01}^2}{V_p}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = -\frac{A_1}{L_c}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -k_{\tilde{m}}$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} = -x_3\left(\sigma r_2^2 \tanh(\tfrac{x_2}{\delta}) + \sigma r_2^2\left(1-\tanh^2(\tfrac{x_2}{\delta})\right)x_2\right)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = -\sigma r_2^2 \tanh(\tfrac{x_2}{\delta})x_2 - k_{\tilde{\omega}1} - 3k_{\tilde{\omega}2}x_3^2$$

For notasjons skyld skrives utrykkene til de partiellderiverte, som ikke er lik null, som følgende:

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = -a_1(x_1,x_2,x_3)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = a_2(x_1,x_2,x_3)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} = -b_1(x_1,x_2,x_3)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} = -b_2(x_1,x_2,x_3)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_2} = -c_2(x_1,x_2,x_3)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_3}{\partial x_3} = -c_3(x_1,x_2,x_3)$$

For enkelhets skyld blir jacobienmatrisen kalt $A(x_1,x_2,x_3)$. Det betyr at jacobienmatrisen er

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= A(x_1,x_2,x_3) \\
&= \begin{bmatrix} -a_1(x_1,x_2,x_3) & a_2(x_1,x_2,x_3) & 0 \\ -b_1(x_1,x_2,x_3) & -b_2(x_1,x_2,x_3) & 0 \\ 0 & -c_2(x_1,x_2,x_3) & -c_3(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix} \\
\frac{\partial f}{\partial x}^T &= A^T(x_1,x_2,x_3) \\
&= \begin{bmatrix} -a_1(x_1,x_2,x_3) & -b_1(x_1,x_2,x_3) & 0 \\ a_2(x_1,x_2,x_3) & -b_2(x_1,x_2,x_3) & c_2(x_1,x_2,x_3) \\ 0 & 0 & -c_3(x_1,x_2,x_3) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

For at estimatoren skal være globalt kontraherende har man fra kontraksjonsteori følgende krav:

$$\frac{\partial f}{\partial x}^T M + \dot{M} + M\frac{\partial f}{\partial x} < -2\beta_M M, \tag{C.2}$$

hvor $\beta_M > 0$, M er en symmetrisk positiv metrikk med konstanter og $\frac{\partial f}{\partial x} = A(x_1, x_2, x_3)$. Metrikken M blir :

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}$$

Bruker (C.2) og får følgende:

$$G(x_1, x_2, x_3) = A^T(x_1, x_2, x_3)\, M + MA(x_1, x_2, x_3)$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \left[\begin{array}{cc} -2a_1(x_1, x_2, x_3)\, m_{11} & \cdots \\ -b_1(x_1, x_2, x_3)\, m_{22} + a_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{11} & \cdots \\ 0 & \cdots \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{ccc} \cdots & -b_1(x_1, x_2, x_3)\, m_{22} + a_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{11} & 0 \\ \cdots & -2b_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{22} & -c_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{33} \\ \cdots & -c_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{33} & -2c_3(x_1, x_2, x_3)\, m_{33} \end{array} \right]$$

For å finne ut om $A^T(x_1, x_2, x_3)\, M + MA(x_1, x_2, x_3) < -2\beta_M M$ benyttes teorem 9 For enkelhets skyld settes $b_1(x_1, x_2, x_3)\, m_{22} = a_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{11}$ slik at:

$$G(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} -2a_1(x_1, x_2, x_3)\, m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -2b_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{22} & -c_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{33} \\ 0 & -c_2(x_1, x_2, x_3)\, m_{33} & -2c_3(x_1, x_2, x_3)\, m_{33} \end{bmatrix}$$

Med bruk av teorem 9 blir:

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 &= -2a_1(x_1,x_2,x_3)\,m_{11} \\
&= -2\left(\left(\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)k_t\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\,(x_1-p_{01})}\right)\right.\right. \\
&\quad\left.\left. +\frac{k_t\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)(x_1-p_{01})+\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\,(x_1-p_{01})}}\right)+k_{\tilde{p}}\right)m_{11} \\
\Delta_1 &\leq -k_p m_{11} < 0 \\
\Delta_2 &= 4a_1(x_1,x_2,x_3)\,m_{11}b_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{22} \\
&= 4\left(\left(\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)k_t\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\,(x_1-p_{01})}\right)\right.\right. \\
&\quad\left.\left. +\frac{k_t\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)(x_1-p_{01})+\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\,(x_1-p_{01})}}\right)+k_{\tilde{p}}\right)m_{11}\,(k_{\tilde{m}}m_{22}) \\
\Delta_2 &\geq k_{\tilde{m}}k_p m_{11}m_{22} > 0 \\
\Delta_3 &= -2a_1(x_1,x_2,x_3)\,m_{11}\left(4b_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{22}c_3(x_1,x_2,x_3)\,m_{33}-(c_2(x_1,x_2,x_3)\,m_{33})^2\right) \\
&= -2\left(\left(\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)k_t\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\,(x_1-p_{01})}\right)\right.\right. \\
&\quad\left.\left. +\frac{k_t\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\left(\left(1-\tanh^2(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)(x_1-p_{01})+\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\right)}{2\sqrt{\tanh(\frac{x_1-p_{01}}{\delta})\,(x_1-p_{01})}}\right)+k_{\tilde{p}}\right)m_{11} \\
&\quad\left(4\,(-k_{\tilde{m}}m_{22})\left(-\sigma r_2^2\tanh(\frac{x_2}{\delta})x_2-k_{\tilde{\omega}1}-3k_{\tilde{\omega}2}x_3^2\right)m_{33}\right. \\
&\quad\left.-x_3^2m_{33}^2\left(\sigma r_2^2\tanh(\frac{x_2}{\delta})+\sigma r_2^2\left(1-\tanh^2(\frac{x_2}{\delta})\right)x_2\right)^2\right) \\
\Delta_3 &\leq -k_{\tilde{\omega}1}k_{\tilde{m}}k_p m_{11}m_{22}m_{33} < 0
\end{aligned}
$$

For at $\Delta_3 \leq -k_{\tilde{\omega}1}k_{\tilde{m}}k_p m_{11}m_{22}m_{33} < 0$
må $12k_{\tilde{m}}m_{22}k_{\tilde{\omega}2} \geq \sup\left(m_{33}\left(\sigma r_2^2\tanh(\frac{x_2}{\delta})+\sigma r_2^2\left(1-\tanh^2(\frac{x_2}{\delta})\right)x_2\right)^2\right)$. Hvis $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ og $\Delta_3 < 0$ er matrisen $G(x_1,x_2,x_3)$ negativt definitt. Hvis $G(x_1,x_2,x_3) < -2\beta_M M$, hvor $\beta_M > 0$, er systemet globalt kontraherende. Dette kravet er innfridd. Det betyr at $x = [p,m,\omega]$ og $x = [\hat{p},\hat{m},\hat{\omega}]$ konvergerer eksponentielt mot hverandre. Tilstandsestimatoren for regulering med drivmoment er dermed inkrementel globalt ekponentielt stabil.

Tillegg D

Matematisk teori

D.1 Beregning av determinanter

Gitt en kvadratisk form $q(x) = x^T Ax$ med symmetrisk $n \times n$ matrise $A = [a_{ij}]$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Δ_k er determinanten til $k \times k$ undermatrisen øverst til venstre i matrisen A. Det vil si:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

Det betyr for eksempel at:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_{11} \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Theorem 9 *(Klassifisering av determinanten til kvadratiske matriser, [21]) La $q(x) = x^T Ax$ være en ikke degenerert kvadratisk form med symmetrisk $n \times n$ matrise A. Da er q:*

- *Positivt definitt hvis og bare hvis* $\Delta_k > 0$ *for hver* $k = 1, 2, \ldots, n$*;*
- *Negativt definitt hvis og bare hvis* $(-1)^k \Delta_k > 0$ *for hver* $k = 1, 2, \ldots, n$*;*
- *Indefinitt hvis ingen av de to betingelsene nevnt ovenfor er oppfylt.*

Theorem 10 *(L'Hôpitals regel, [22]) Anta at funksjonene* f *og* g *er deriverbar for* $x \neq a$ *i et åpent intervall som inneholder et punkt* a *og at* $g'(x)$ *ikke er null i det punktet. Anta også at*

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 = \lim_{x \to a} g(x)$$

Da vil

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

forutsatt at grensen på høyre side enten er reell eller er $+\infty$ *eller* $-\infty$*.*