

Styring av mikrosatellitt med reaksjonshjul i tetraeder

Geir Ytrehus

10.06.2003

NTNU



HOVEDOPPGAVE

Kandidatens navn: Geir Ytrehus

Fag: Teknisk Kybernetikk

Oppgavens tittel (norsk): Styring av mikrosatellitt med reaksjonshjul i tetraeder

Oppgavens tittel (engelsk): Control of a micro satellite with reaction wheels in a tetrahedron

Oppgavens tekst:

Basert på arbeid utført som prosjektoppgave høsten 2002 skal følgende utføres:

1. Sett deg inn i teorien om pådragsallokering. Gi en beskrivelse av hvordan denne teorien kan brukes til styring av mikrosatellitt med fire reaksjonshjul i tetraeder.
2. Ta hensyn til at hjulene kan ha forskjellig ytelse, at ett eller flere hjul kan opphøre å fungere og modeller en satellitt med fire reaksjonshjul
 - a) når reaksjonshjulene er plassert i et tetraeder i satellittens tyngdepunkt,
 - b) når reaksjonshjulene er plassert i et tetraeder som *ikke* ligger i satellittens tyngdepunkt
 - c) når reaksjonshjulene grunnet geometriske begrensninger i satellitten er plassert i en vilkårlig annen konfigurasjon.
3. Sammenlign ved hjelp av simuleringer i Matlab/Simulink a) lineær regulator, b) ulineær regulator og c) sliding mode regulator med hensyn på ytelse for tilfellene i punkt 2.
4. Gjør en stabilitetsanalyse av den ulineære regulatoren.
5. Gjør en evaluering av hvor fort man kan dreie satellitten med reaksjonshjulenes momenter og regulator type som parametere.
6. Gyroer gir større momenter enn reaksjonshjul. Disse benyttes i økende grad på satellitter som skal snu seg hurtig og kan øke mobiliteten på satellitten. Undersøk dette.

Oppgaven gitt: 7. Januar 2003

Besvarelsen leveres: 10. Juni 2003

Besvarelsen levert:

Utført ved Institutt for teknisk kybernetikk

Veileder: Åge Skullestad, Kongsberg Defence & Aerospace

Trondheim, den 7. Januar 2003
Jan Tommy Gravdahl

Faglærer

Forord

Dette er en hovedoppgave utført ved institutt for teknisk kybernetikk ved NTNU i Trondheim våren 2003 med Jan Tommy Gravdahl som veileder. Jeg vil takke ham for god veiledning med hovedoppgaven.

Trondheim, 10. juni 2003

Geir Ytrehus

Sammendrag

Denne hovedoppgaven tar for seg styring av en mikrosatellitt med fire reaksjonshjul plassert i tetraeder. Denne plasseringen gir ekstra robusthet ved at satellitten fortsatt kan reguleres om alle akser ved tap av ett reaksjonshjul. Det er benyttet pådragsallokering for å fordele pådragene på de fire reaksjonshjulene ved hjelp av optimalisering. Tre forskjellige regulatorer er sammenlignet: en lineær, en ulineær og en sliding mode regulator. Regulatorene har blitt demonstrert ved simulering av satellittens dynamikk ved ulike sprang i orienteringsreferansene. Dette er gjort ved implementering og simulering i Matlab og Simulink. De to sistnevnte regulatorene er stabile ved alle simuleringer, mens den lineære regulatoren kun er stabil rundt et arbeidspunkt. Et grundig stabilitetsbevis er forsøkt utviklet for den ulineære regulatoren. Sliding mode regulatoren kan gi ekstremt nøyaktig regulering, men det fører til hard pådragsbruk og rask slitasje av reaksjonshjulene.

Det er undersøkt hvordan reguleringen påvirkes ved plassering av tetraederet utenfor tyngdepunktet. En forenklet modell er utviklet. For NSAT-1 satellitten, som er brukt som eksempel i denne hovedoppgaven, viser det seg at satellitten kan reguleres meget bra uansett hvor tetraederet befinner seg i satellitten. Ved plassering av tetraederet utenfor tyngdepunktet kreves større pådrag fra reaksjonshjulene for å regulere satellitten. Tetraederet bør derfor plasseres så nær tyngdepunktet som mulig for å bruke minst mulig energi. Ved konfigurasjoner som avviker fra tetraederet vil det behøves større pådrag for å regulere satellitten. Som videre arbeid kan det være interessant å undersøke hvordan gyroer kan benyttes som aktuatorer.

Innhold

Forord	iii
Sammendrag	v
1 Innledning	1
2 Teori/Bakgrunnstoff	3
2.1 Referansesystemer	3
2.1.1 Jordsentrerte referansesystemer	3
2.1.2 Geografiske referansesystemer	3
2.2 Rotasjonsmatriser	5
2.3 Orienteringspresentasjon	7
2.3.1 Eulervinkler	7
2.3.2 Eulerparametre	7
3 Matematiske modeller	11
3.1 Modellering av satellitten	11
3.1.1 Dynamisk modell av satellitten	12
3.1.2 Dynamisk modell av gravitasjonsgradienten	12
3.1.3 Dynamisk modell av reaksjonshjul	14
3.2 Linearisering av den dynamiske modellen	15
3.3 Fullstendig linearisert satellittmodell	16
3.4 Matematisk modellering av reaksjonshjul i tetraederkonfigurasjon	18
3.4.1 Tetraeder i satellittens tyngdepunkt	19
3.4.2 Tetraeder utenfor satellittens tyngdepunkt	19
4 Pådragsallokering	21
4.1 Teori	21
4.2 For satellitten	23
4.3 Aktuatorekonfigurasjoner	23
4.3.1 Tetraeder i satellittens tyngdepunkt (utregning av tetraeder-	
ermatrisen)	23
4.3.2 Tetraeder utenfor satellittens tyngdepunkt	25

4.3.3	Reaksjonshjul med ulik ytelse	26
4.3.4	Reaksjonshjul plassert i en annen konfigurasjon enn tetraeder	26
5	Aktuatorer	29
5.1	Reaksjonshjul	29
5.2	Gyroer	30
6	Regulatordesign	33
6.1	Referansemodell	33
6.2	Lineær regulator	34
6.3	Ulineær regulator	35
6.3.1	Stabilitetsbevis	35
6.4	Sliding Mode regulator	40
6.5	Sammenligning av regulatorene	44
7	Simuleringer	45
7.1	Simuleringer med tetraeder i satellittens tyngdepunkt	45
7.1.1	Simulering med lineær regulator	46
7.1.2	Simulering med ulineær regulator	54
7.1.3	Simulering med sliding mode regulator	62
7.2	Simuleringer med tetraeder utenfor satellittens tyngdepunkt	73
7.3	Simuleringer med endret vektmatrise	77
7.4	Simuleringer med uperfekt tetraeder	78
7.5	Satellittens hurtighet	79
8	Konklusjon	83
9	Videre arbeid	85
A	Matlabkode	89
B	Simulinkdiagrammer	105

Figurer

2.1	ECEF-systemet roterer med vinkelhastighet ω_e relativt til ECI-systemet.	4
2.2	Venstre: Sammenligning av ORBIT- og BODY-referansesystemene. Høyre: Stigende og fallende node i en orbit.	5
2.3	Illustrasjon av Eulervinkler	8
3.1	Viser gravitasjonsfeltets påvirkning på et masseelement dm	13
3.2	Illustrasjon av tetraederprinsippet.	18
4.1	Oversikt over reguleringsstrukturen	22
4.2	Grafisk fremstilling av de tre forskjellige konfigurasjonene. Tetraederkonfigurasjonene i midten, $\mathbf{T}_1$ til venstre og $\mathbf{T}_2$ til høyre.	26
5.1	SGCMG har konstant omdreiningshastighet og gir pådrag ved å endre akselen den dreier om.	30
6.1	<i>Saturation</i> -funksjon med boundary layer $\Phi = 0.5$	43
6.2	Funksjonen $\tanh\left(\frac{\sigma_i}{\Phi}\right)$ med boundary layer $\Phi = 0.5$	43
7.1	Systemrespons for lineær regulator uten støy.	48
7.2	Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul uten støy.	48
7.3	Systemrespons for lineær regulering med støy.	49
7.4	Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med støy.	49
7.5	Systemrespons for lineær regulator ved tap av ett reaksjonshjul. . .	50
7.6	Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved tap av ett reaksjonshjul.	50
7.7	Systemrespons for lineær regulator ved tap av to reaksjonshjul. . .	51
7.8	Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved tap av to reaksjonshjul.	51
7.9	Systemrespons for lineær regulator ved sprang i ϕ på 80°	52
7.10	Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 80°	52
7.11	Systemrespons for lineær regulator ved sprang i ϕ på 140°	53

7.12	Utgangsverdier fra lineær regulator ved sprang i ϕ på 140°	53
7.13	Systemrespons for ulineær regulator uten støy.	55
7.14	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul uten støy.	55
7.15	Systemrespons for ulineær regulator med støy.	56
7.16	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med støy.	56
7.17	Systemrespons for ulineær regulator ved tap av ett reaksjonshjul. .	57
7.18	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved tap av ett reaksjonshjul.	57
7.19	Systemrespons for ulineær regulator ved tap av to reaksjonshjul. .	58
7.20	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved tap av to reaksjonshjul.	58
7.21	Systemrespons for ulineær regulator ved tap av to reaksjonshjul. Her vises hvordan ϕ aldri når referansen da den inntar periodiske svingninger.	59
7.22	Systemrespons for ulineær regulator ved sprang i ϕ på 80°	59
7.23	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 80°	60
7.24	Systemrespons for ulineær regulator ved sprang i ϕ på 140°	60
7.25	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 140°	61
7.26	Systemrespons for sliding mode regulator uten støy, ved bruk av <i>sign</i> -funksjon istedenfor <i>tanh</i> -funksjon.	64
7.27	Systemrespons for sliding mode regulator uten støy. $\Phi_1 = 0.002$. .	64
7.28	Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjon- shjul uten støy. $\Phi_1 = 0.002$	65
7.29	Systemrespons for sliding mode regulator med støy. $\Phi_1 = 0.002$. .	65
7.30	Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjon- shjul med støy. $\Phi_1 = 0.002$	66
7.31	Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjon- shjul med støy. $\Phi_2 = 0.02$	66
7.32	Systemrespons for sliding mode regulator ved bortfall av ett reak- sjonshjul. $\Phi_2 = 0.02$	67
7.33	Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjon- shjul ved bortfall av ett reaksjonshjul. $\Phi_2 = 0.02$	67
7.34	Systemrespons for sliding mode regulator ved bortfall av ett reak- sjonshjul. $\Phi_1 = 0.002$	68
7.35	Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjon- shjul ved bortfall av ett reaksjonshjul. $\Phi_1 = 0.002$	68
7.36	Systemrespons for sliding mode regulator ved bortfall av to reak- sjonshjul. $\Phi_1 = 0.002$	69

7.37	Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved bortfall av to reaksjonshjul. $\Phi_1 = 0.002$	69
7.38	Systemrespons for sliding mode regulator ved sprang i ϕ på 80° . $\Phi_2 = 0.02$.	70
7.39	Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 80° . $\Phi_2 = 0.02$	70
7.40	Systemrespons for sliding mode regulator ved sprang i ϕ på 140° . $\Phi_2 = 0.02$.	71
7.41	Systemrespons for sliding mode regulator ved sprang i ϕ på 140° . $\Phi = 0.006$.	71
7.42	Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 140° . $\Phi = 0.006$.	72
7.43	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med tetraeder i punktet $[0 \ 0 \ 0.1]$.	74
7.44	Systemrespons med tetraeder i punktet $[0 \ 0 \ 0.5]$.	75
7.45	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med tetraeder i punktet $[0 \ 0 \ 0.5]$.	75
7.46	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med tetraeder i punktet $[0.1 \ 0.1 \ 0.1]$.	76
7.47	Systemrespons med tetraeder i punktet $[0.5 \ 0.5 \ 0.5]$.	76
7.48	Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med tetraeder i punktet $[0.5 \ 0.5 \ 0.5]$.	77
7.49	Momentpådrag fra reaksjonshjulene ved vektmatrisene $\mathbf{W}_1$ (øverst) og $\mathbf{W}_2$ (nederst).	78
7.50	Momentpådrag fra reaksjonshjulene for de ulike konfigurasjonene. Øverst: Perfekt tetraeder. Midten: $\mathbf{T}_1$. Nederst: $\mathbf{T}_2$.	79
7.51	De tre regulatorenas respons ved maksimalt pådrag satt lik $0.01Nm$.	81
7.52	De tre regulatorenas respons ved maksimalt pådrag satt lik $1Nm$.	81
7.53	Sliding mode regulatorens respons ved maksimalt pådrag satt lik $1Nm$ og sliding-mode parametrene satt som $U_i^{MAX} = 1$ og $\Phi = 0.05$.	82
B.1	Satellite system.	106
B.2	Commanded reference	107
B.3	Reference Model	108
B.4	Controllers	109
B.5	Satellite Nonlinear Dynamics	110

Kapittel 1

Innledning

Kongsberg Defence & Aerospace ønsker å bygge opp kompetanse på attitude control system (ACS) til en norsk mikrosatellitt. Mikrosatellitten skal i dette prosjektet kunne styres om alle tre akser ved hjelp av fire reaksjonshjul i tetraederkonfigurasjon. Banen til satellitten er sirkulær og går rett over polene i en høyde av 600 km. Det tas utgangspunkt i [1] og [11]. Modeller og utregninger fra disse oppgavene vil bli brukt her.

Hovedoppgavens disposisjon er som følger:

- Kapittel 2 omhandler teori og bakgrunnstoff som blir henvist til i senere kapitler.
- Kapittel 3 gir en detaljert beskrivelse av satellittmodellen.
- Kapittel 4 omhandler pådragsallokering og viser hvordan pådragsallokering kan benyttes for satellitt med reaksjonshjul i tetraeder.
- Kapittel 5 gir en kort gjennomgang av ulike aktuatorer. Gyroer brukt som aktuatorer er gjennomgått som et alternativ til reaksjonshjul.
- Kapittel 6 beskriver tre ulike regulatorer; en lineær, en ulineær og en sliding mode regulator. Sliding mode regulatoren er utviklet som en del av hovedoppgaven, mens den lineære og ulineære regulatoren er hentet fra [1]. Det er utviklet et grundig stabilitetsbevis for den ulineære regulatoren.
- I kapittel 7 er de tre ulike regulatorene sammenlignet ved hjelp av simuleringer. Det er også simuleringer på hvordan satellitten oppfører seg ved tetraeder utenfor tyngdepunktet, ved endret vektmatrise og ved en konfigurasjon som avviker fra tetraederet.
- Kapittel 8 er hovedoppgavens konklusjon.
- Kapittel 9 foreslår videre arbeid.

Kapittel 2

Teori/Bakgrunnstoff

2.1 Referansesystemer

Det finnes flere referansesystemer som kan være nyttige når satellittens bevegelse skal modelleres. I de to følgende delkapitler gjennomgås jordsentrerte og geografiske referansesystemer.

2.1.1 Jordsentrerte referansesystemer

ECI(*i*-system)

Earth Centered Inertial systemet er et romfiksert referansesystem. Det er et ikke-aksellerert referansesystem der Newtons bevegelseslover gjelder. ECI-systemet er lokalisert i sentrum av jordkloden og beskrives ved $x_i y_i z_i$ (se figur 2.1).

ECEF(*e*-system)

Earth Centered Earth Fixed systemet er lokalisert i sentrum av jordkloden slik som ECI-systemet, men aksesystemet roterer relativt til ECI-systemet. Rotasjonshastigheten er lik jordens, $w_e = 7.2921 \cdot 10^{-5} \frac{rad}{s}$. ECEF-systemet beskrives ved $x_e y_e z_e$ (se figur 2.1).

2.1.2 Geografiske referansesystemer

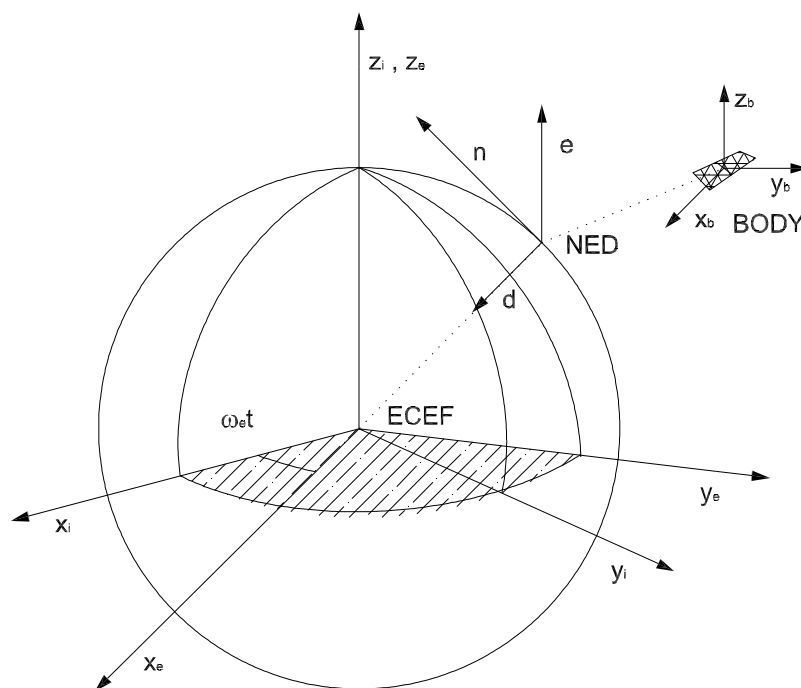
NED(*n*-system)

North East Down systemet er definert relativt til jordens referanse-ellipsoide og beskrives ved $x_n y_n z_n$, evt. *ned* (se figur 2.1). Det er dette koordinatsystemet som benyttes i dagliglivet. Vanligvis er det definert som tangentplanet til jordens overflate. Systemet beveger seg med objektet det refererer til, men akseretningene er fiksert nord, øst og ned. x -aksen peker mot geografisk nord, y mot øst og z

nedover normalt på jordens overflate. NED-systemets relative posisjon til ECEF-systemet bestemmes ved hjelp av de to vinklene l (breddegrad) og μ (lengdegrad).

BODY(*b*-system)

BODY systemet følger satellitten og beskrives ved $x_b y_b z_b$ (se figur 2.1). Origo i BODY-systemet er som regel lagt til objektets massesenter. Posisjon og orientering av satellitten er beskrevet relativt til et initialsystem som ECEF- eller NED-systemet. Bevegelsen derimot, er beskrevet ved bruk av BODY-systemet. Under bevegelse kommer både rettlinjert hastighet og rotasjonshastighet.

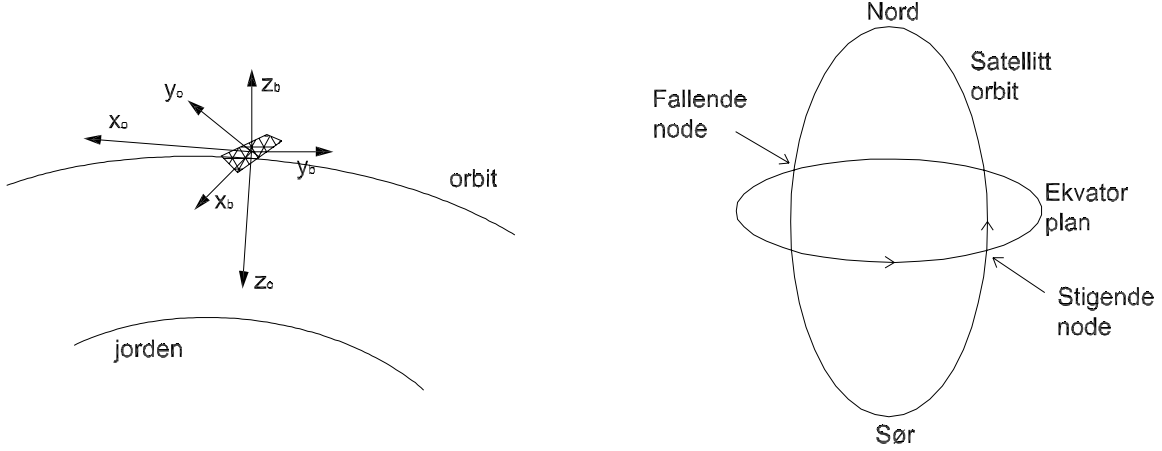


Figur 2.1: ECEF-systemet roterer med vinkelhastighet ω_e relativt til ECI-systemet.

ORBIT(*o*-system)

ORBIT systemet er et system som brukes til satellitter i bane rundt jorden og beskrives ved $x_o y_o z_o$. Dette systemet har origo i massesenteret til satellitten. z_o -aksen er parallell med linjen fra jordas sentrum til *stigende node*, hvor *stigende node* er det punktet hvor satellitten krysser ekvatorlinjen på vei opp(nord) som

vist i figur 2.2 (høyre). x_o -aksen er rettet i fartsretningen til satellitten, mens y_o -aksen vil følge høyrehåndsregelen og stå normalt på både z_o - og x_o -aksen. En sammenligning mellom ORBIT- og BODY-systemet er vist i figur 2.2 (venstre).



Figur 2.2: Venstre: Sammenligning av ORBIT- og BODY-referansesystemene. Høyre: Stigende og fallende node i en orbit.

2.2 Rotasjonsmatriser

De ulike koordinatsystemene benyttes i forskjellige sammenhenger. For å regne frem og tilbake mellom koordinatsystemene benyttes rotasjonsmatriser. Rotasjonsmatrisen fra system X til Y skrives

$$\mathbf{R}_Y^X \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \quad (2.1)$$

En transformasjon av en vektor $\mathbf{v}$ fra system X til Y kan skrives

$$\mathbf{v}^Y = \mathbf{R}_X^Y \mathbf{v}^X. \quad (2.2)$$

I følge definisjonen på lineære transformasjoner er $\mathbf{R}_Y^X \mathbf{R}_X^Y = \mathbf{1}$, hvor $\mathbf{1}$ er identitetsmatrisen. Rotasjonsmatrisen er en symmetrisk ortonormal matrise, noe som gir at

$$(\mathbf{R}_Y^X)^{-1} = (\mathbf{R}_Y^X)^T = \mathbf{R}_X^Y. \quad (2.3)$$

For å finne forskjellen i vinkelhastighet mellom to systemer er det nødvendig å derivere rotasjonsmatrisen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}_Y^X \mathbf{R}_X^Y = \dot{\mathbf{R}}_Y^X \mathbf{R}_X^Y + \mathbf{R}_Y^X \dot{\mathbf{R}}_X^Y = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Hvis man da definerer $\mathbf{S}$ som

$$\mathbf{S} = \dot{\mathbf{R}}_Y^X \mathbf{R}_X^Y = \dot{\mathbf{R}}_Y^X (\mathbf{R}_Y^X)^T, \quad (2.5)$$

kan man oppnå at

$$\mathbf{S} + \mathbf{S}^T = \mathbf{0}. \quad (2.6)$$

Dette fører til at $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T$ som betyr at $\mathbf{S}$ er en skjevsymmetrisk matrise. Uttrykkene for $\mathbf{S}$ og vinkelhastigheten blir da

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{XY}^X) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{XY}^X = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

der $\boldsymbol{\omega}_{XY}^X$ er vinkelhastigheten i system Y relativt til system X , representert i system X .

Ved å multiplisere $\mathbf{S}$ med $\mathbf{R}_Y^X$ fås det at

$$\dot{\mathbf{R}}_Y^X = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{XY}^X) \mathbf{R}_Y^X = \mathbf{R}_Y^X \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{XY}^Y). \quad (2.8)$$

Den skjevsymmetriske matrisen $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{XY}^X)$ er sammenfallende med kryssproduktoperatoren siden

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{XY}^X) \mathbf{R}_Y^X = \boldsymbol{\omega}_{XY}^X \times \mathbf{R}_Y^X. \quad (2.9)$$

Reglene for kryssprodukt gir at

$$\mathbf{R}_X^Y (\boldsymbol{\omega}_{XY}^X \times \mathbf{R}_Y^X) = \mathbf{R}_X^Y \boldsymbol{\omega}_{XY}^X \times \mathbf{R}_X^Y \mathbf{R}_Y^X \quad (2.10)$$

Ut i fra dette kan følgende relasjon utledes:

$$\mathbf{R}_X^Y \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{XY}^X) \mathbf{R}_Y^X = \mathbf{S}(\mathbf{R}_X^Y \boldsymbol{\omega}_{XY}^X). \quad (2.11)$$

Rotasjonsmatrisen kan da skrives som

$$\mathbf{R}_{\lambda,\beta} = \mathbf{1} + \sin \beta \mathbf{S}(\lambda) + (1 - \cos \beta) \mathbf{S}^2(\lambda), \quad (2.12)$$

hvor β definerer hvor mye man skal rotere rundt vektoren λ .

Til slutt kan vinkelhastighetens relasjon nevnes:

$$\boldsymbol{\omega}_{XY}^X = -\boldsymbol{\omega}_{YX}^X. \quad (2.13)$$

Dette betyr at vinkelhastigheten mellom system X og Y er like stor som vinkelhastigheten mellom system Y og X , men med motsatt fortegn.

2.3 Orienteringspresentasjon

I denne oppgaven benyttes euleparametre istedenfor eulervinkler. Eulerparametre gir en entydig og ikke-singulær beskrivelse av orienteringen.

2.3.1 Eulervinkler

Med eulervinkler tilordnes hver romlige akse en vinkel. Rotasjonen rundt aksene z , y og x betegnes ψ , θ og ϕ , som vist i figur 2.3.

Rotasjonsmatrisen beskrevet med Eulervinkler skrives som

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{z,\psi} \mathbf{R}_{y,\theta} \mathbf{R}_{x,\phi}. \quad (2.14)$$

Hver matrise er definert slik:

$$\mathbf{R}_{x,\phi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{y,\theta} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{z,\psi} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

hvor notasjonen $c(\cdot) = \cos(\cdot)$ og $s(\cdot) = \sin(\cdot)$. Rotasjonsmatrisen fra ORBIT-systemet til BODY-systemet kan da finnes som

$$\mathbf{R}_b^o = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi c\phi + c\psi s\theta s\phi & s\psi s\phi + c\psi s\theta c\phi \\ s\psi c\theta & c\psi c\phi + s\psi s\theta s\phi & -c\psi s\phi + s\psi s\theta c\phi \\ -s\theta & c\theta s\phi & c\theta c\phi \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Ved vinkelen $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ vil det oppstå singulariteter i rotasjonsmatrisene. Dette er ikke ønskelig i et reguleringsystem. For å unngå dette problemet benyttes euleparametre.

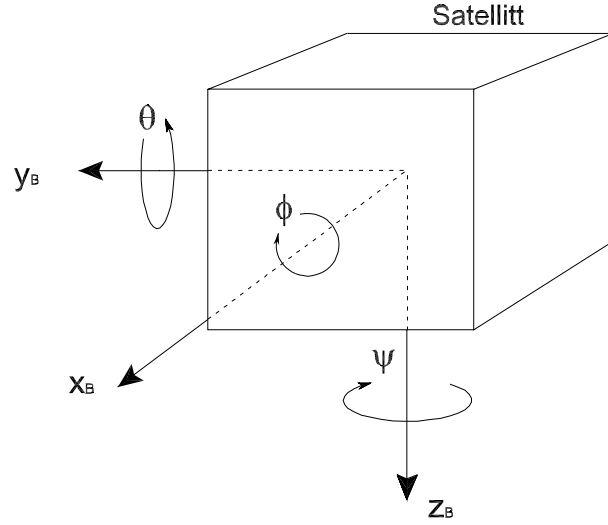
2.3.2 Eulerparametre

Eulerparametrene gir en entydig og ikke-singulær beskrivelse av orienteringen og baserer seg på kvaternioner. Dette er godt beskrevet i [7]. Et kvaternion $\mathbf{q}$ er definert som et komplekst tall med en reell η og tre ortogonale imaginære ledd gitt ved

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Et enhetskvaternion tilfredsstiller at $\mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$. Definerer derfor et sett Q av kvaternioner som

$$Q = \left\{ \mathbf{q} \mid \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1, \mathbf{q} = [\eta, \boldsymbol{\varepsilon}^T]^T, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^3, \eta \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.18)$$



Figur 2.3: Illustrasjon av Eulervinkler

Det må vises at Eulerparametrene kan brukes til å beskrive bevegelser mellom referansesystemer.

Den imaginære delen av Eulerparametrene beskrives som

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T = \lambda \sin \frac{\beta}{2} \quad (2.19)$$

og den reelle delen beskrives som

$$\eta = \cos \frac{\beta}{2} \quad (2.20)$$

hvor β stammer fra definisjonen av $\mathbf{R}$ gitt i ligning (2.12). Her er $\boldsymbol{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^T$ en enhetsvektor som tilfredsstiller

$$\boldsymbol{\lambda} = \pm \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}}}, \quad \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0. \quad (2.21)$$

Dette gir følgende uttrykksmåte for Eulerparametrene:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} \\ \boldsymbol{\lambda} \sin \frac{\beta}{2} \end{bmatrix} \in Q, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi. \quad (2.22)$$

Ved å beregne indreproduktet $\mathbf{q}^T \mathbf{q}$ ser en at ved å tilfredsstille kravet om normering, får en

$$\mathbf{q}^T \mathbf{q} = \eta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1. \quad (2.23)$$

Rotasjonsmatrisen beskrevet med Eulerparametre blir ved å bruke ligning (2.12), (2.19) og (2.20):

$$\mathbf{R}_b^o(\mathbf{q}) = \mathbf{R}_{\eta, \varepsilon} = \mathbf{1} + 2\eta \mathbf{S}(\varepsilon) + 2\mathbf{S}^2(\varepsilon). \quad (2.24)$$

Rotasjonsmatrisen fra ORBIT-systemet til BODY-systemet kan da defineres med Eulerparametre som følger:

$$\mathbf{R}_b^o = \begin{bmatrix} 1 - 2(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 - \eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_3) & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_3^2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3 - \eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \eta\varepsilon_1) & 1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Andre veien blir rotasjonsmatrisen

$$\mathbf{R}_o^b = (\mathbf{R}_b^o)^\top. \quad (2.26)$$

Matrisen $\mathbf{R}_o^b$ kan skrives som

$$\mathbf{R}_o^b = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^b & \mathbf{c}_2^b & \mathbf{c}_3^b \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

hvor $\mathbf{c}_i^b = [c_{ix}^b, c_{iy}^b, c_{iz}^b]^\top$ er kolonnevektorer og $\mathbf{c}_1^b$, $\mathbf{c}_2^b$ og $\mathbf{c}_3^b$ er projeksjonen av x_o -, y_o - og z_o -aksen i BODY-systemet.

Kinematikken til eulerparametrene er godt beskrevet i [8]. Vinkelhastigheten er skrevet som

$$\boldsymbol{\omega}^b = 2 \left[\eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\eta} \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^\times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \right], \quad (2.28)$$

mens kinematikken er

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\omega}^b \quad (2.29)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\eta \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^\times) \boldsymbol{\omega}^b. \quad (2.30)$$

Ved å benytte regelen om kryssprodukt fra ligning (2.9), $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{a} := \mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{a}$, blir kinematikken

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\omega}^b \quad (2.31)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})) \boldsymbol{\omega}^b. \quad (2.32)$$

Kapittel 3

Matematiske modeller

Siden det tas utgangspunkt i modellen fra [1] refereres denne her. Det blir en noe enklere modell da magnetpoler ikke benyttes i denne oppgaven.

3.1 Modellering av satellitten

En satellitt kan enkelt modelleres ved bruk av newtonsk mekanikk. For å oppnå en hensiktsmessig matematisk modell benyttes polarkoordinater. Fra Keplers andre lov får man ved å følge satellittens bane $(r(t), \theta(t))$

$$r^2 \dot{\theta} = h, \quad h \text{ konstant.} \quad (3.1)$$

Når en satellitt beveger seg i tyngdefeltet er per definisjon kraften som virker på satellitten parallell med radiusvektor. Dreiemomentet kan da uttrykkes som

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F(r) \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}, \quad (3.2)$$

hvor $\hat{\mathbf{r}}$ er enhetsvektoren parallelt med $\mathbf{r}$. Siden sammenhengen mellom dreiemoment og dreieimpuls kan beskrives som $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$, fås uttrykket for dreieimpulsen

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \text{konstant}, \quad (3.3)$$

hvor $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ er impulsen til satellitten.

En annen hensiktsmessig måte å beskrive dreieimpulsen er som et produkt av treghetsmoment og vinkelfrekvens

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}. \quad (3.4)$$

Siden de fysiske parametrene er avhengig av det gjeldende referansesystemet, skrives uttrykkene med referansesystemene som superskrift. For treghetssystemet (i-systemet) skrives

$$\mathbf{L}^i = \mathbf{I}^i \boldsymbol{\omega}_{ib}^i, \quad (3.5)$$

der $\boldsymbol{\omega}_{ib}^i$ er vinkelfrekvensen målt i b-systemet relativt til i-systemet, representert i i-systemet.

3.1.1 Dynamisk modell av satellitten

Satellitten sees på som et stivt legeme. Med utgangspunkt i Eulers ligning for moment finner man satellittens respons som et resultat av påtrykt dreiemoment:

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times (\mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) = \boldsymbol{\tau}^b, \quad (3.6)$$

hvor $\mathbf{I}$ er satellittens treghetsmoment, $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ er vinkelhastigheten til b-systemet relativt til i-systemet, representert i b-systemet, og $\boldsymbol{\tau}^b$ er det totale dreiemomentet påtrykt satellitten. På komponentform kan $\boldsymbol{\tau}^b$ skrives som

$$\boldsymbol{\tau}^b = \begin{bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} = \boldsymbol{\tau}_g^b + \boldsymbol{\tau}_a^b = \boldsymbol{\tau}_g^b + \boldsymbol{\tau}_m^b + \boldsymbol{\tau}_r^b, \quad (3.7)$$

hvor $\boldsymbol{\tau}_g^b$ er dreiemomentet som gravitasjonsfeltet påtrykker satellitten, og $\boldsymbol{\tau}_a^b$ er dreiemomentet generert av aktuatorene. Dette kan splittes opp i $\boldsymbol{\tau}_m^b$ og $\boldsymbol{\tau}_r^b$; henholdsvis for magnetpoler og reaksjonshjul. Siden det kun er reaksjonshjul som skal benyttes i denne oppgaven blir det totale dreiemomentet påtrykt satellitten

$$\boldsymbol{\tau}^b = \boldsymbol{\tau}_g^b + \boldsymbol{\tau}_r^b. \quad (3.8)$$

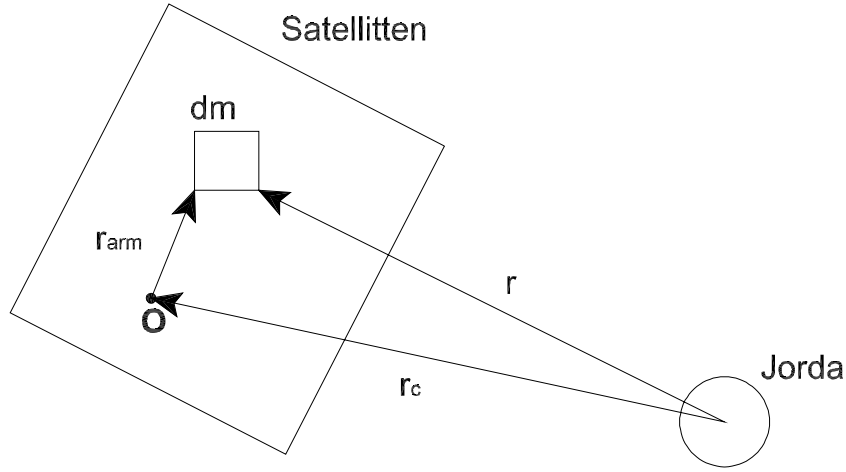
3.1.2 Dynamisk modell av gravitasjonsgradienten

Styrken på gravitasjonsfeltet er kvadratisk avtagende med hensyn på avstanden. Dette fører til at selv om satellitten er et stivt legeme med uniform massefordeling, vil gravitasjonssenteret avvike noe fra massesenteret. Dette vil skape et dreiemoment. Ved å legge til en gravitasjonsbom vil denne effekten økes. Bruk av gravitasjonsbom skal ikke behandles i denne oppgaven.

Det gjøres følgende antakelser for å forenkle modelleringen:

- Det er kun gravitasjonsfeltet fra jorden som betraktes
- Jorden antas å ha en symmetrisk massefordeling

- Tverrsnittet er lite relativt til avstanden til jordens sentrum
- Satellitten betraktes som et stivt legeme



Figur 3.1: Viser gravitasjonsfeltets påvirkning på et masseelement dm .

Kraften $d\mathbf{f}$ virker på et masseelement dm gitt ved Newtons lov som

$$d\mathbf{f} = -\gamma M \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dm, \quad (3.9)$$

der $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$ er den universelle gravitasjonskonstanten, $M = 5.97 \cdot 10^{24} kg$ er jordens masse og $r = |\mathbf{r}|$ er avstanden fra jordens sentrum til masseelementet dm . Dreiemomentet generert av gravitasjonsfeltet kan vises å være

$$\boldsymbol{\tau}_g = \int_b \mathbf{r} \times d\mathbf{f} = -\gamma M \int_b \left(\frac{\mathbf{r}_{arm} \times \mathbf{r}}{r^3} \right) dm, \quad (3.10)$$

hvor $\mathbf{r}$ er vektoren fra satellittens massesenter til masseelementet dm , og $r = r_c + r_{arm}$, alt vist i figur 3.1. Ligning (3.10) kan omformuleres ved å omskrive $\mathbf{r}$ til en sum av $\mathbf{r}_c$ og $\mathbf{r}_{arm}$, og det kan da vises at

$$\boldsymbol{\tau}_g = \left(\frac{3\gamma M}{r_c^3} \right) \mathbf{r}_c \times \mathbf{r}_c \int_b \mathbf{r}^2 dm \quad (3.11)$$

Ved å definere

$$\boldsymbol{\sigma}_o = \frac{\mathbf{r}_c}{r_c}, \quad (3.12)$$

og skrive

$$\bar{\mathbf{I}} = \int_b (r^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}^2) dm, \quad (3.13)$$

kan man uttrykke $\boldsymbol{\tau}_g$ som

$$\boldsymbol{\tau}_g = 3 \left(\frac{\gamma M}{r_c^3} \right) \boldsymbol{\sigma}_o \times \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\sigma}_o = 3\omega_o^2 \boldsymbol{\sigma}_o \times \bar{\mathbf{I}} \boldsymbol{\sigma}_o \quad (3.14)$$

hvor $\omega_o^2 = \left(\frac{\gamma M}{r_c^3} \right)$. Ved å innføre eulerparametre kan det vises at dreiemomentet uttrykt i b-systemet blir

$$\boldsymbol{\tau}_g^b = 3\omega_o^2 \begin{bmatrix} 2(I_z - I_y)(\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \eta \varepsilon_1)(1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)) \\ 2(I_x - I_z)(\varepsilon_1 \varepsilon_3 - \eta \varepsilon_2)(1 - 2(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)) \\ 4(I_y - I_x)(\varepsilon_1 \varepsilon_1 - \eta \varepsilon_2)(\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \eta \varepsilon_1) \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

hvor I_x , I_y og I_z er diagonalleddene i treghetsmatrisa $\mathbf{I}$.

3.1.3 Dynamisk modell av reaksjonshjul

Reaksjonshjulene kan modelleres etter ligningen

$$\boldsymbol{\tau}_r^b = \left(\frac{d\mathbf{L}_r}{dt} \right)^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{L}_r - \boldsymbol{\tau}_{frikisjon}^b \quad (3.16)$$

hvor $\boldsymbol{\tau}_r^b$ er dreiemomentet til reaksjonshjulet uttrykt i b-systemet, $\mathbf{L}_r = [L_{rx} \ L_{ry} \ L_{rz}]^T = \mathbf{I}_r \boldsymbol{\omega}_r$ er den totale dreieimpulsen til hjulene, og $\boldsymbol{\tau}_{frikisjon}^b$ er friksjonen i hjulsystemet. Ut ifra Newtons 3. lov om at kraft er lik motkraft kan det lett utledes at dreiemoment skapt av reaksjonshjulene vil gi et tilsvarende motsatt rettet dreiemoment på satellitten. Dette beskrives ved

$$\mathbf{I}_r \dot{\boldsymbol{\omega}}_r = -\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b \quad (3.17)$$

Friksjonsleddet neglisjeres i denne oppgaven.

Dreiemomentet kan uttrykkes på komponentform med $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]$ som

$$\boldsymbol{\tau}_r^b = \left(\frac{d\mathbf{L}_r}{dt} \right)^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} \tau_{rx} \\ \tau_{ry} \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{L}_{rx} + L_{rz}\omega_y - L_{ry}\omega_z \\ \dot{L}_{ry} + L_{rx}\omega_z - L_{rz}\omega_x \\ \dot{L}_{rz} + L_{ry}\omega_x - L_{rx}\omega_y \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

3.2 Linearisering av den dynamiske modellen

For å få en fullstendig linearisert modell må alle ledd lineariseres. Den lineariserte modellen skal benyttes for å utvikle en lineær regulator.

Linearisering av kinematikken: Kinematikken til satellitten er gitt i (2.31) og (2.32):

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\omega}_{ob}^b \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2}(\eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b\end{aligned}$$

Linearisering rundt punktet $\eta = 1, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, med $\boldsymbol{\omega}_{ob}^b = \mathbf{0}$ gir

$$\dot{\eta} = 0 \quad (3.19)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{ob}^b \quad (3.20)$$

Linearisering av rotasjonsmatrisen: Rotasjonsmatrisen gitt i eulerparametre lineariseres rundt punktet $\eta = 1, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{R}_b^o = \mathbf{1} + 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.21)$$

Linearisering av vinkelhastigheten: Relativt til i-systemet er vinkelhastigheten representert i b-systemet

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \mathbf{R}_o^b \boldsymbol{\omega}_{io}^o. \quad (3.22)$$

Siden $\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}$ kan $\mathbf{R}_o^b$ skrives som

$$\mathbf{R}_o^b = (\mathbf{R}_b^o)^\top = \mathbf{1} - 2\mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}). \quad (3.23)$$

På matriseform blir dette:

$$\mathbf{R}_o^b = \begin{bmatrix} 1 & 2\varepsilon_3 & -2\varepsilon_2 \\ -2\varepsilon_3 & 1 & 2\varepsilon_1 \\ 2\varepsilon_2 & -2\varepsilon_1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Fra den lineariserte kinematikken har vi at

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{ob}^b \Leftrightarrow \boldsymbol{\omega}_{ob}^b = 2\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.25)$$

Ut i fra disse ligningene finnes den lineariserte vinkelhastigheten:

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{\varepsilon}_1 - 2\omega_o \varepsilon_3 \\ 2\dot{\varepsilon}_2 + \omega_o \\ 2\dot{\varepsilon}_3 + 2\omega_o \varepsilon_1 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Den deriverte av vinkelhastigheten blir:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\ddot{\varepsilon}_1 - 2\omega_o\dot{\varepsilon}_3 \\ 2\ddot{\varepsilon}_2 \\ 2\ddot{\varepsilon}_3 + 2\omega_o\dot{\varepsilon}_1 \end{bmatrix}. \quad (3.27)$$

Linearisering av dreiemoment fra gravitasjon: Pådraget $\boldsymbol{\tau}_g^b$ fra ligning (3.11) i den dynamiske modellen lineariseres om $\eta = 1, \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$. Dette gir:

$$\boldsymbol{\tau}_g^b = 3\omega_o^2 \begin{bmatrix} (I_z - I_y)\varepsilon_1 \\ (I_z - I_x)\varepsilon_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.28)$$

Linearisering av dreiemoment fra reaksjonshjul: Ligningen for dreiemoment generert av reaksjonshjul lineariseres rundt punktet $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{\tau}_r^b = \left(\frac{d\mathbf{L}_r}{dt} \right)^b = \begin{bmatrix} \dot{L}_{rx} \\ \dot{L}_{ry} \\ \dot{L}_{rz} \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

3.3 Fullstendig linearisert satellittmodell

Ved å kombinere ligning (3.6) og (3.8) for så å substituere inn (3.28) og (3.29), blir den lineariserte modellen for satellitten:

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b = -\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) + \boldsymbol{\tau}_g^b + \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)^b. \quad (3.30)$$

På komponentform kan den lineariserte modellen skrives:

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon}_1 &= (1 - k_x)\omega_o\dot{\varepsilon}_3 - 4k_x\omega_o^2\varepsilon_1 + \frac{1}{2I_x}(\dot{L}_{rx}) \\ \ddot{\varepsilon}_2 &= -3k_y\omega_o^2\varepsilon_2 + \frac{1}{2I_y}(\dot{L}_{ry}) \\ \ddot{\varepsilon}_3 &= -(1 - k_z)\omega_o\dot{\varepsilon}_1 - k_z\omega_o^2\varepsilon_3 + \frac{1}{2I_z}(\dot{L}_{rz}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

hvor $k_x = \frac{I_y - I_z}{I_x}$, $k_y = \frac{I_x - I_z}{I_y}$ og $k_z = \frac{I_y - I_x}{I_z}$.

Tilstandsvektoren $\mathbf{x}$ og dreiemomentvektoren $\mathbf{u}$ innføres:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \dot{\varepsilon}_1 & \varepsilon_2 & \dot{\varepsilon}_2 & \varepsilon_3 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}^\top \quad (3.32)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \dot{L}_{rx} & \dot{L}_{ry} & \dot{L}_{rz} \end{bmatrix}^\top \quad (3.33)$$

Med dette kan tilstandsmodellen skrives som

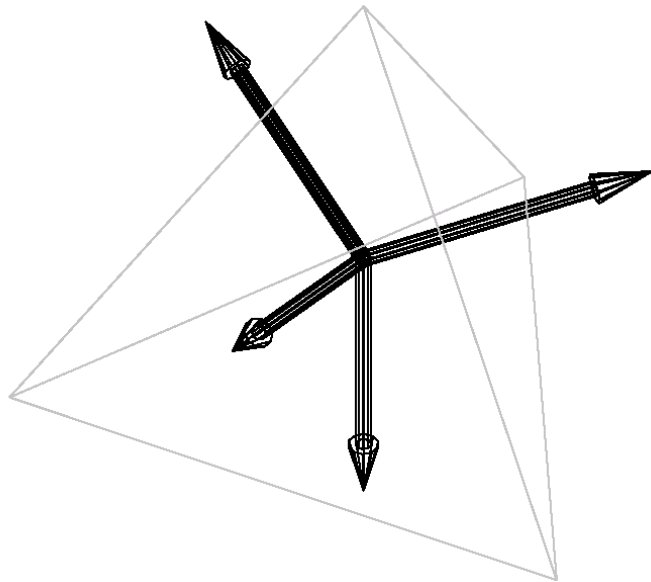
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.34)$$

hvor $\mathbf{A}$ -matrisen blir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4k_x\omega_o^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-k_x)\omega_o \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3k_y\omega_o^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(1-k_z)\omega_o & 0 & 0 & -k_z\omega_o^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

og $\mathbf{B}$ -matrisen:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2I_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2I_y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2I_z} \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$



Figur 3.2: Illustrasjon av tetraederprinsippet.

3.4 Matematisk modellering av reaksjonshjul i tetraederkonfigurasjon

Reaksjonshjul kan generere et vilkårlig moment om den akse de er montert på. Ved å montere reaksjonshjul på alle tre akser kan man dreie satellitten til enhver ønsket orientering. Utfordringen her ligger i å utvikle en regulator som er rask, effektiv og robust. For å få en ekstra robust regulering kan man plassere fire reaksjonshjul i tetraederkonfigurasjon. Det vil da være mulig å opprettholde en tilfredsstillende regulering selv om ett av reaksjonshjulene skulle svikte. Reguleringsprinsippet blir det samme som ved tre reaksjonshjul, men ved å benytte seg av pådragsallokering, får man hvilket pådrag hvert av de fire reaksjonshjulene skal gi. Dette er nærmere beskrevet i kapittel 4. Hvis reaksjonshjulene er plassert i tetraederkonfigurasjon vil allokeringsmatrisen se slik ut:

$$\mathbf{T}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 & \mathbf{t}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Hvordan denne matrisen er funnet er vist i kapittel 4.3.1. Prinsippet bak et tetraeder er at det skal være like store vinkler mellom samtlige vektorer. Denne vinkelen blir da 109.47° . Tetraederprinsippet er illustrert i figur 3.2. Tetraeder er også omhandlet i oppgavene [5] og [6].

3.4.1 Tetraeder i satellittens tyngdepunkt

Når tetraederet ligger i tyngdepunktet fås pådragene til hvert reaksjonshjul ved bruk av pådragsallokering, som vist i kapittel 4. Reaksjonshjulene kan maks gi et pådrag på $0.01Nm$. Hvis det etter pådragsallokering skulle komme et pådrag over denne verdien på et av reaksjonshjulene, vil det bli satt lik $0.01Nm$.

3.4.2 Tetraeder utenfor satellittens tyngdepunkt

Ut fra regulatoren fås ønsket pådrag til satellitten. Hvis reaksjonshjulene står i tyngdepunktet er det enkelt å sette dette pådraget på satellitten. Det gjøres ved hjelp av pådragsallokering. Pådraget blir da fordelt mellom de ulike reaksjonshjulene slik at de tilsammen gir ønsket pådrag.

Det er ikke nødvendigvis slik at reaksjonshjulene alltid vil befinne seg i satellittens tyngdepunkt. Hvis man for eksempel strekker ut en antenne fra satellitten vil tyngdepunktet endre seg. Det kan da være nyttig å finne ut hvordan reaksjonshjulene skal reagere når de ikke befinner seg i tyngdepunktet. Regulatoren vil ikke merke noen forskjell, den gir kun ønsket pådrag τ_{CG} i tyngdepunktet $\begin{bmatrix} x_{CG} & y_{CG} & z_{CG} \end{bmatrix}$.

Det vil da bli nødvendig å finne hva slags pådrag τ_O som trengs i tetraederets plassering $\begin{bmatrix} x_O & y_O & z_O \end{bmatrix}$ for å gi det ønskede pådrag τ_{CG} i tyngdepunktet. Når man har funnet τ_O , benyttes pådragsallokering for å finne hvilket pådrag hvert reaksjonshjul skal gi. Problemet er da å finne en sammenheng mellom τ_O og τ_{CG} .

Tetraederets plassering betegnes O , mens satellittens tyngdepunkt betegnes CG (Center of Gravity). Det innføres her et nytt koordinatsystem med tetraederets plassering i origo. Vinkelretningene er uforandret, det er kun origo som forskyves fra CG til O . Fra [7] finnes det at treghetsmatrisen $\mathbf{I}_O \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ om O er definert som:

$$\mathbf{I}_O = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_O = \mathbf{I}_O^T > 0, \quad (3.38)$$

hvor I_x , I_y og I_z er treghetsmomentene om x_b , y_b og z_b og $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$ og $I_{yz} = I_{zy}$ er kryssleddene av disse. Utfyllende teori om treghetsmoment er beskrevet i [3]. Ved hjelp av parallell akse teoremet kan treghetsmatrisen om O skrives som:

$$\mathbf{I}_O = \mathbf{I}_c - m\mathbf{S}^2(\mathbf{r}_g^b), \quad (3.39)$$

hvor $\mathbf{I}_c = \mathbf{I}_c^T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ er treghetsmatrisa om tyngdepunktet CG , m er satellittens masse og $\mathbf{r}_g^b$ er avstandsvektoren fra O til CG i b-systemet. Ved å plassere tetraederet utenfor tyngdepunktet fås ut fra dette et større treghetsmoment, og

det trengs derfor større moment fra reaksjonshjulene for å endre satellittens orientering.

Problemet nå er å få samkjørt pådraget fra gravitasjonsgradienten med pådraget fra reaksjonshjulene. Reaksjonshjulene gir et moment om O , mens gravitasjonsgradienten gir et moment om CG . En modell med to ulike treghetsmatriser må utvikles. Det er ikke utviklet en eksakt modell for dette her, men det etterlates til videre arbeid med satellitten. Derimot er en forenklet modell utviklet, hvor det sees helt bort fra gravitasjonsgradienten $\boldsymbol{\tau}_g^b$. Siden satellittens treghetsmomenter er meget små, vil dette gi en meget god tilnærming. Det benyttes her den forenklingen at en vinkelendring om CG tilsvarer en vinkelendring om O . Den forenklete modellen blir

$$\mathbf{I}_O \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times (\mathbf{I}_O \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) = \boldsymbol{\tau}_r^b \quad (3.40)$$

hvor $\mathbf{I}_O$ er treghetsmatrisa for satellitten i tetraederets plassering $\mathbf{r}_g^b$ fra satellittens tyngdepunkt.

Kapittel 4

Pådragsallokering

4.1 Teori

Pådragsallokering for marine fartøy står godt forklart i [7]. Denne teorien kan også benyttes for reaksjonshjul på satellitter. For fartøy med n frihetsgrader er det nødvendig å fordele utgangene fra regulatoren, $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^n$, på de r ulike aktuatorene slik at pådraget $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ oppnås, se figur 4.1. Hvis $r > n$ er dette et overaktuert problem, mens $r < n$ gir et underaktuert problem. Med $r = n$ vil allokeringsmatrisen være kvadratisk. Omregningen fra $\boldsymbol{\tau}$ til $\mathbf{u}$ er et optimaliseringsproblem. I sin enkleste form er dette problemet uten begrensninger, mens problemet blir mer komplisert når fysiske begrensninger implementeres, se [10].

Pådraget på fartøyet kan generelt skrives som

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}) \underbrace{\mathbf{K}\mathbf{u}}_{\mathbf{f}}, \quad (4.1)$$

hvor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ og $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^p$ er definert som

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_p]^\top, \quad \mathbf{u} = [u_1, \dots, u_r]^\top \quad (4.2)$$

og $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ er en vektor med pådragskrefter.

Kraftmatrisen $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ avgjør størrelsen på kreftene hver aktuator påfører fartøyet. Matrisen er alltid diagonal slik at:

$$\mathbf{K} = \text{diag} \{K_1, \dots, K_r\}, \quad \mathbf{K}^{-1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{K_1}, \dots, \frac{1}{K_r} \right\} \quad (4.3)$$

Allokeringsmatrisen $\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ er definert av et sett kolonnevektorer, $\mathbf{t}_i \in \mathbb{R}^n$. Hver aktuator har sin kolonnevektor. Dette gir matrisen:

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\alpha}) = [\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_r] \quad (4.4)$$

For et system som har like mange aktuatorer som frihetsgrader eller er overaktuert ($r \geq n$) er det mulig å finne en "optimal" løsning på hvilke pådrag hver enkelt aktuator skal gi. Det må da defineres optimaliseringskriterier. For et marint fartøy kan det for eksempel være ønskelig å benytte styreflater mer aktivt enn propeller for å minimalisere energiforbruk. Dette kommer fram i en vektmatrise $\mathbf{W}$ som er positiv definit og vanligvis diagonal. Det minste kvadraters (LS) optimaliseringsproblemet uten begrensninger kan bli seende slik ut:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \min \{\mathbf{f}^\top \mathbf{W} \mathbf{f}\} \\ \text{subject to} \quad &: \quad \boldsymbol{\tau} - \mathbf{T} \mathbf{f} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Dette problemet kan løses ved hjelp av Lagrange multiplikatorer, utledet i [7]. Løsningen blir

$$\mathbf{f} = \underbrace{\mathbf{W}^{-1} \mathbf{T}^\top (\mathbf{T} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T}^\top)^{-1}}_{\mathbf{T}_w^\dagger} \boldsymbol{\tau}, \quad (4.6)$$

hvor matrisen

$$\mathbf{T}_w^\dagger = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T}^\top (\mathbf{T} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{T}^\top)^{-1} \quad (4.7)$$

blir kalt den generaliserte inverse. Hvis $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ får alle aktuatorene lik vekt, og den inverse blir redusert til *Moore-Penrose pseudo inverse*:

$$\mathbf{T}^\dagger = \mathbf{T}^\top (\mathbf{T} \mathbf{T}^\top)^{-1}. \quad (4.8)$$

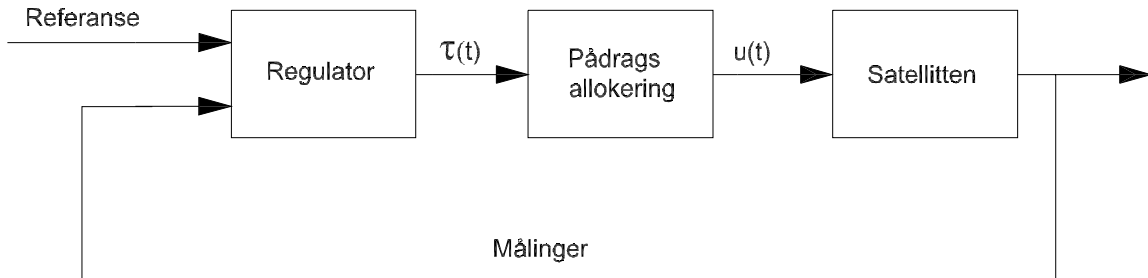
Det totale pådraget fra aktuatorene med kraftmatrise blir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{T}_w^\dagger \boldsymbol{\tau}. \quad (4.9)$$

I Matlab finnes det en kommando i GNC Toolbox som regner ut dette:

$$\mathbf{u} = \text{alloc}(\mathbf{K}, \mathbf{T}, \mathbf{W}, \boldsymbol{\tau}) \quad (4.10)$$

Denne kommandoen blir brukt for å finne hvilket pådrag hver enkelt aktuator skal gi.



Figur 4.1: Oversikt over reguleringsstrukturen

4.2 For satellitten

For satellitten i denne oppgaven er det interessant å se på et overaktuert problem med $n = 3$ frihetsgrader (roll, pitch, yaw) og $r = 4$ aktuatorer (4 reaksjonshjul). Allokeringsmatrisen blir da bestående av $r = 4$ kolonnevektorer, en for hver aktuator. Hver kolonnevektor bestemmes ved å se på hvor mye bidrag rotasjonen av reaksjonshjulet vil gi på rotasjonen av satellitten. Kolonnevektoren er en enhetsvektor som representerer den aksens reaksjonshjulet snurrer om. Ved å plassere et reaksjonshjul på hver av aksene x, y, z vil allokeringsmatrisen bli identitetsmatrisen **1**. Allokeringsmatrisen for satellitt med fire reaksjonshjul blir

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1 & \mathbf{t}_2 & \mathbf{t}_3 & \mathbf{t}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1,x} & r_{2,x} & r_{3,x} & r_{4,x} \\ r_{1,y} & r_{2,y} & r_{3,y} & r_{4,y} \\ r_{1,z} & r_{2,z} & r_{3,z} & r_{4,z} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

hvor $\mathbf{t}_i = \begin{bmatrix} r_{i,x} & r_{i,y} & r_{i,z} \end{bmatrix}^\top$ er vektoren til aksens reaksjonshjul i roterer om.

4.3 Aktuatorkonfigurasjoner

I denne oppgaven er det reaksjonshjul plassert i tetraeder som er den mest aktuelle konfigurasjonen. Som nevnt i kapittel 3.4 skal tetraederkonfigurasjonen gi en ekstra robust regulering, siden bortfall av ett reaksjonshjul fortsatt skal gi fullgod regulering om alle akser.

4.3.1 Tetraeder i satellittens tyngdepunkt (utregning av tetraedermatrisen)

For å finne allokeringsmatrisen for tetraederkonfigurasjonen, må kolonnevektoren til hvert enkelt reaksjonshjul finnes som vist i ligning (4.11). Vinkelen mellom vektorene i tetraederet er som kjent 109.47° , dvs $2 \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$.

For vektorene i et tetraeder gjelder følgende:

$$r_{1,x} + r_{2,x} + r_{3,x} + r_{4,x} = 0 \quad (4.12)$$

$$r_{1,y} + r_{2,y} + r_{3,y} + r_{4,y} = 0 \quad (4.13)$$

$$r_{1,z} + r_{2,z} + r_{3,z} + r_{4,z} = 0 \quad (4.14)$$

Det vil si at reaksjonshjulene i tetraederet ved likt pådrag på alle hjulene gir totalt moment lik null om alle akser. Siden alle kolonnevektorene skal være enhetsvektorer må

$$\sqrt{(r_{i,x})^2 + (r_{i,y})^2 + (r_{i,z})^2} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.15)$$

Vinkelen mellom alle vektorene skal være $\varphi = 2 \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$. Da vil skalarproduktet mellom to vektorer bli

$$\mathbf{t}_i \mathbf{t}_j = |\mathbf{t}_i| |\mathbf{t}_j| \cos \varphi, \quad (4.16)$$

hvor $|\mathbf{t}_i| = |\mathbf{t}_j| = 1$, og φ er vinkelen mellom vektorene.

Ligningene (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) og (4.16) kan sammen benyttes for å finne et uttrykk for tetraedermatrisen. Ved å legge $\mathbf{t}_1$ langs z-aksen slik at $\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, oppfylles (4.14) ved å sette $r_{2,z} = r_{3,z} = r_{4,z} = \frac{1}{3}$. Den foreløpige tetraedermatrisen ser da slik ut:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & r_{2,x} & r_{3,x} & r_{4,x} \\ 0 & r_{2,y} & r_{3,y} & r_{4,y} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Vektorene $\mathbf{t}_2$, $\mathbf{t}_3$ og $\mathbf{t}_4$ danner alle vinkelen $\varphi = 2 \cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ med vektor $\mathbf{t}_1$ uavhengig av x- og y-komponentene. Dette vises ved å sette inn tall i (4.16):

$$r_{1,x}r_{j,x} + r_{1,y}r_{j,y} + r_{1,z}r_{j,z} = \cos \varphi, \quad (4.18)$$

hvor $j = 2, 3, 4$. De to første leddene i uttrykket på venstre side forsvinner, og uttrykket $r_{1,z}r_{j,z} = -\frac{1}{3}$ blir stående igjen. Ligningen er sann siden også høyresiden $\cos(2 \cos^{-1}(1/\sqrt{3})) = -\frac{1}{3}$.

For å finne $\mathbf{t}_2$ settes $r_{2,x} = 0$. Ved å løse (4.15) for $i = 2$ fås den siste komponenten $r_{2,y}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{(0)^2 + (r_{2,y})^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} &= 1 \\ r_{2,y} &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ r_{2,y} &= \pm \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Det er her funnet to mulige løsninger, $r_{2,y} = -\frac{2}{3}\sqrt{2}$ velges. For å oppfylle (4.13) settes $r_{3,y} = r_{4,y} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$. Den foreløpige tetraedermatrisen ser da slik ut:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & r_{3,x} & r_{4,x} \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Vektorene $\mathbf{t}_3$ og $\mathbf{t}_4$ danner begge vinkelen $\varphi = 2\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ med vektor $\mathbf{t}_2$ uavhengig av x-komponentene. Dette vises ved å sette inn tall i (4.16):

$$r_{2,x}r_{j,x} + r_{2,y}r_{j,y} + r_{2,z}r_{j,z} = \cos \varphi, \quad (4.21)$$

hvor $j = 3, 4$. Det første leddet i uttrykket på venstre side forsvinner, og uttrykket $r_{2,y}r_{j,y} + r_{2,z}r_{j,z} = -\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$ blir stående igjen. Ligningen er sann siden også høyresiden $\cos(2\cos^{-1}(1/\sqrt{3})) = -\frac{1}{3}$.

For å finne $\mathbf{t}_3$ og $\mathbf{t}_4$ løses (4.15) for $i = 3, 4$ og de siste komponentene $r_{3,x}$ og $r_{4,x}$ finnes

$$\begin{aligned} \sqrt{(r_{i,x})^2 + \left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} &= 1 \\ r_{i,x} &= \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)^2} \\ r_{i,x} &= \pm \frac{1}{3}\sqrt{6} \end{aligned} \quad (4.22)$$

hvor $i = 3, 4$. Det er her funnet to mulige løsninger, $r_{3,x} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ og $r_{4,x} = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$ velges. Med disse løsningene stemmer også (4.12), og den totale tetraedermatrisen blir:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

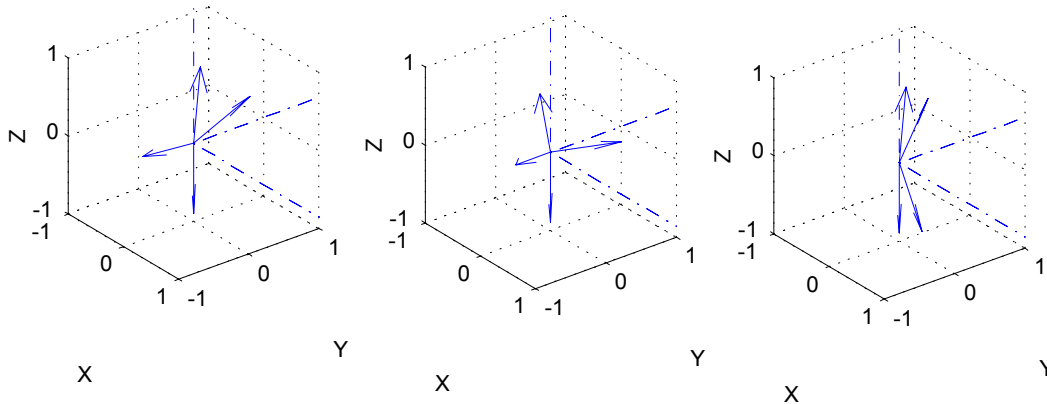
Ved å ta utgangspunkt i en annen kolonnevektor kan denne matrisen se helt annerledes ut, men konfigurasjonen er likevel et tetraeder.

4.3.2 Tetraeder utenfor satellittens tyngdepunkt

For tetraeder utenfor satellittens tyngdepunkt benyttes samme allokeringsmatrise som i tyngdepunktet. Satellittmodellen derimot endres ved å finne en ny treghetsmatrise for tetraederets nye plassering. Den nye treghetsmatrisen $\mathbf{I}_O$ er beskrevet i ligning (3.39). For simuleringer utenfor tyngdepunktet er en forenklet modell benyttet, vist i ligning 3.40, hvor gravitasjonsgradientens påvirkning er utelatt. Denne forenklingen har liten betydning for resultatene, da reaksjonshjulenes pådrag er mye større enn pådragene fra gravitasjonsgradienten. Simuleringer med tetraeder utenfor tyngdepunktet er gjennomført i kapittel 7.2.

4.3.3 Reaksjonshjul med ulik ytelse

Hvis satellitten har reaksjonshjul med ulik ytelse er det ønskelig å allokere pådragene på grunnlag av dette. Det vil da være ønskelig at reaksjonshjulene med størst ytelse gir det største pådraget. Dette kan enkelt utføres ved å vekte de forskjellige reaksjonshjulene ulikt i en vektmatrise som beskrevet i kapittel 4.1. Uten å ta hensyn til dette kan det oppleves at reaksjonshjulene med lav ytelse blir kjørende med maksimalt pådrag, mens reaksjonshjulene med høy ytelse kun blir kjørende med få prosent av sitt maksimale pådrag. Reaksjonshjulene med lav ytelse vil da fort bli utslitt, mens de med høy ytelse vil forbli tilnærmet ubrukt. Det er ønskelig å ha en mest mulig jevn fordeling av pådragene prosentmessig i forhold til reaksjonshjulenes maksimale ytelse. Til dette benyttes vektmatrisen $\mathbf{W}$. Simuleringer med ulike vektmatriser er gjennomført i kapittel 7.3.



Figur 4.2: Grafisk fremstilling av de tre forskjellige konfigurasjonene. Tetraederkonfigurasjonene i midten, $\mathbf{T}_1$ til venstre og $\mathbf{T}_2$ til høyre.

4.3.4 Reaksjonshjul plassert i en annen konfigurasjon enn tetraeder

Det kan være meget vanskelig å få reaksjonshjulene til å stå i et perfekt tetraeder i satellitten. Dette kan for eksempel være på grunn av andre komponenter som tar opp plass og står i veien for tetraederet. Det kan derfor være interessant å se hvordan reguleringen blir ved en annen konfigurasjon enn tetraeder. Som eksempel her er det brukt to forskjellige konfigurasjoner; en som ligner ganske mye på et tetraeder, $\mathbf{T}_1$, og en som er veldig forskjellig, $\mathbf{T}_2$. Allokeringsmatrisene

er valgt som

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{1}{5}} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -1 & -\sqrt{0.92} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \sqrt{0.875} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Kolonnevektorene for de ulike konfigurasjonene er vist i figur 4.2.

Det er ønskelig at reaksjonshjulene står i en konfigurasjon som er mest mulig spredt, det vil si at det er størst mulig vinkel mellom samtlige kolonnevektorer. Dette oppnås med tetraederkonfigurasjonen hvor vinkelen er lik mellom alle kolonnevektorene. Med størst mulig spredning vil reaksjonshjulene jobbe minst mulig mot hverandre, og pådragsbruket minimaliseres. Simuleringer med de ulike allokeringsmatrisene er vist i kapittel 7.4.

Kapittel 5

Aktuatorer

Satellitter brukes til mange forskjellige oppgaver som har ulike krav til orientering. For å endre satellittens orientering kan både aktive og passive aktuatorer benyttes. Passive aktuatorer er typisk en gravitasjonsbom som utnytter gravitasjonsfeltet. Dette gir ikke stor nøyaktighet, men kun en grov orientering av satellitten. Det finnes flere typer aktive aktuatorer, blant annet reaksjonshjul, magnetpoler, gyroer og thrustere. Disse gir en mer nøyaktig orientering. Thrustere kan benyttes til å endre satellittens orientering og til å endre satellittbanen. Magnetpoler er svært små, men gir ikke like hurtig og nøyaktig orientering som reaksjonshjulene. Hvis meget hurtig endring av orienteringen ønskes, kan gyrorer benyttes. Hvordan gyroer kan benyttes som aktuator står beskrevet i kapittel 5.2. I dette prosjektet benyttes reaksjonshjul.

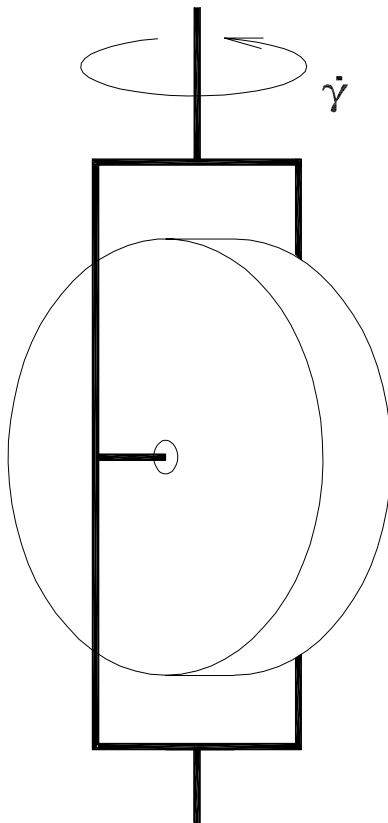
5.1 Reaksjonshjul

Reaksjonshjul dreier om en fast akse og gir pådrag ved å endre omdreiningshastigheten. Prinsippet om hvordan et reaksjonshjul påvirker satellitten er gitt av likning (3.17). Et dreiemoment tilført reaksjonshjulet vil gi et motsatt rettet like stort moment på satellitten. Et hjul ved konstant hastighet eller i ro vil ikke gi noe dreiemoment. Hjulet må aksellereres for å skape et pådrag. I tillegg vil et reaksjonshjul i bevegelse gi en stabiliserende effekt fordi roterende legemer har gyroskopisk stivhet.

Orienteringen ved hjelp av reaksjonshjul er rask og nøyaktig med høy båndbredde. Ulempene med reaksjonshjul i forhold til magnetpoler er at de er større, tyngre og mer energikrevende. De er også mer utsatt for slitasje og er sårbare under oppskyting av satellitten. I tillegg er de svært kostbare. Et annet problem med reaksjonshjul er at de ved vedvarende konstant støy hele tiden må være

i aksellerasjon for å motvirke denne støyen. Til slutt vil reaksjonshjulene gå i metning, og satellitten vil ikke lenger være i stand til å holde ønsket orientering.

Det er mange fordeler ved bruk av reaksjonshjul. Mens magnetpoler er avhengige av jordens magnetfelt som varierer i satellittbanen, virker reaksjonshjulene uavhengig av satellittens geografiske posisjon. Den gyrokopiske effekten generert av reaksjonshjulene gir økt stabilitet og bedrer robustheten mot forstyrrelser. Reaksjonshjul gir en mye hurtigere og mer nøyaktig orientering enn magnetpoler.



Figur 5.1: SGCMG har konstant omdreiningshastighet og gir pådrag ved å endre akselen den dreier om.

5.2 Gyroer

Det mest brukte området for gyroer er som måleinstrument. En gyro opphengt i gimbalen holder sin orientering uavhengig av om fartøyet den er festet til endrer orientering. Gyroen brukes på denne måten som et kompass ved å sammenligne gyroens spinnakse med fartøyet orientering. For satellitten kan det være interes-

sant å undersøke hvordan en gyro kan benyttes som aktuator. Dette er omhandlet i [12], [13] og [14].

Control Moment Gyros (CMG) har som regel en fast omdreiningshastighet og gir pådrag ved å endre aksene den dreier om. CMG kan være enten single gimbaled (SGCMG) eller double gimbaled (DGCMG). For single gimbaled kan aksene endres i ett plan, mens double gimbaled kan oppnå alle ønskelige spinnakser. SGCMG, vist i figur 5.1, har en spesiell fordel framfor DGCMG ved at den kan gi mye større momentpådrag til satellitten enn det pådraget som må til for å endre spinnaksen. Dette er et fenomen som kalles Torque Amplification beskrevet i [13].

Ved å plassere fire SGCMG i pyramidekonfigurasjon oppnås full regulering om alle akser. Dette er sjelden brukt i satellitter grunnet stor mekanisk kompleksitet og på grunn av singularitetsproblemer. I [12] er det beskrevet to metoder for å allokere pådraget på de ulike SGCMG. Den første metoden benytter pseudoinvers, hvor det er mulighet for at systemet blir singulært. Hvis det ved en singularitet ønskes et pådrag langs den singulære retningen, kan systemet låses i en singulær tilstand. I den andre metoden innføres en algoritme for å unngå disse singularitetene. Hvis systemet er i nærheten av en singularitet reagerer systemet med en reorienteringsprosess for å unngå denne singulariteten. Dette fungerer bra så lenge man ikke er avhengig av at satellitten har full presisjon under reorienteringen.

Det finnes gyroer som kan variere omdreiningshastighet, kalt variable speed CMG (VSCMG). Ved konstant akse fungerer disse som reaksjonshjul.

CMG kan gi et mye større pådrag enn reaksjonshjul. I [12] nevnes det at CMG kan gi fra 50 til flere tusen ganger større pådrag enn reaksjonshjul. Ulempen med CMG er singularitetene og den mekaniske kompleksiteten. Hvis raskere orientering enn det som er mulig med reaksjonshjul i tetraeder ønskes, kan det være interessant å undersøke bruken av fire SGCMG i pyramidekonfigurasjon. Det er ikke satt opp noen fysisk modell for dette i denne oppgaven, dette etterlates til videre arbeid med satellitten.

Kapittel 6

Regulatordesign

I eksperter i team oppgaven, [1], ble det utviklet to regulatorer, en lineær og en ulineær. Det blir gitt en rask gjennomgang av disse i kapittel 6.2 og 6.3. Som en del av hovedoppgaven er et stabilitetsbevis for den ulineære regulatoren utviklet. Deretter er det utviklet en sliding mode regulator i kapittel 6.4. Kapittel 6.1 beskriver referansemodellen som er benyttet.

6.1 Referansemodell

Referansemodellen genererer kontinuerlig satellittens ønskede orientering i rommet ut ifra en referanse. Regulatoren forsøker etter beste evne å følge denne orienteringen. Trackingregulatorer er avhengige av å ha en kontinuerlig, deriverbar trajektor. Et sprang i trajektoren er derfor ikke ønskelig. Referansemodellen glatter ut sprang i referansen og gir en kontinuerlig, deriverbar trajektor ved hjelp av filter. I denne oppgaven benyttes et tredjeordens glattefilter.

Referansekvaternionet betegnes som $\mathbf{q}_r$, og utgangen av filteret som $\mathbf{q}_d$. Referansemodellens transferfunksjon blir:

$$\frac{q_{d_i}}{q_{r_i}} = \frac{\omega_n^3}{(s + \omega_n)(s^2 + 2\zeta_n\omega_n + \omega_n^2)}, i \in \{1...4\} \quad (6.1)$$

Den relative dempefrekvensen velges $\zeta = 1$, noe som fører til et kritisk dempet utgangssignal fra referansemodellen. Siden man ønsker å kunne bruke en stjernsensor til måling av orientering, er det viktig at båndbredden til denne, $\omega_s = 3 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$, ikke overskrides. Filterets resonansfrekvens ω_n bør derfor settes slik at systemet ikke overskrider denne båndbredden. Satellittens vinkelhastigheter er avhengige av referansesprangets størrelse, og derfor bør ω_n justeres etter størrelsen på referansespranget.

6.2 Lineær regulator

Det utvikles en lineær trackingregulator på bakgrunn av den lineariserte satellitt-dynamikken. Satellittens lineariserte bevegelsesligninger kan uttrykkes på formen:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (6.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6.3)$$

$\mathbf{A}$ - og $\mathbf{B}$ -matrisa er beskrevet ved likning (3.35) og (3.36). Som utgang på systemet ønskes $[\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3]^\top$. $\mathbf{C}$ -matrisa blir da:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

For å utvikle denne regulatoren benyttes tilstandstilbakekopling. Pådragsvektoren $\mathbf{u}$ bestemmes ut ifra referansevektoren $\mathbf{r}$, tilstandsvektoren $\mathbf{x}$ og regulatorens gainmatrise $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \quad (6.5)$$

$\mathbf{K}$ -matrisa bidrar til å endre det lukkede systemets poler og dermed dets dynamikk. Bevegelsesligningen til systemet med tilbakekopling vil bli seende slik ut:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}(\mathbf{r} - \mathbf{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{r} \quad (6.6)$$

Dynamikken i dette modifiserte systemet er altså gitt av $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ istedenfor $\mathbf{A}$.

Regulatorens som er utviklet her er en PD-regulator. Det ser man lett da tilstandsvektoren består av kvaternionets vektordel $\boldsymbol{\varepsilon}$, og dens deriverte $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. Ved å utvide tilstandsvektoren slik at også den integrerte av $\boldsymbol{\varepsilon}$ var tilgjengelig, ville det vært mulig å utvikle en PID-regulator, men dette er ikke gjort her.

$\mathbf{K}$ -matrisa bestemmes ved hjelp av polplassering. Dette gjøres i matlab ved bruk av kommandoen `place(A, B, p)`, hvor $\mathbf{p}$ er en vektor som inneholder ønskede poler. Polene som ble benyttet var disse komplekskonjugerte polene:

$$\begin{bmatrix} -0.1 + 0.1j \\ -0.1 - 0.1j \\ -0.1 + 0.1j \\ -0.1 - 0.1j \\ -0.1 + 0.1j \\ -0.1 - 0.1j \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

For å finne disse ble en 6.ordens transferfunksjon med tre identiske resonansledd benyttet. Resonansfrekvensen ω_n ble valgt til 0.2, og det relative dempeleddet ζ_n ble satt lik 1 for å få en kritisk dempet respons.

Det er viktig å sjekke om systemet er styrbart før man i det hele tatt starter å utvikle en regulator. Det gjøres enkelt ved å sjekke om styrbarhetsmatrisa $[\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B} \dots]$ har full rang. I matlab benyttes kommandoen $\text{rank}(\text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B}))$ som i dette tilfelle gir $\text{rank}=6$, og systemet er dermed styrbart.

6.3 Ulineær regulator

Det utvikles en ulineær trackingregulator som tar direkte utgangspunkt i orienteringsavviket mellom virkelig og ønsket orientering, representert ved kvaternioner. Avviket mellom to kvaternioner er ikke identisk med algebraisk differans; det vil si $\tilde{\mathbf{q}} \neq \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$. Derimot defineres avviket mellom to kvaternioner som kvaternioneproduktet mellom det ønskede kvaternionet konjugert og det virkelige kvaternionet:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_d^* \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \eta_d \eta + \boldsymbol{\varepsilon}_d^T \boldsymbol{\varepsilon} \\ \eta_d \boldsymbol{\varepsilon} - \eta \boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d \times \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

For vektordelen av kvaternionet er avviket:

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \eta_d \boldsymbol{\varepsilon} - \eta \boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d \times \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (6.9)$$

Den deriverte av avviket er:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \dot{\eta}_d \boldsymbol{\varepsilon} + \eta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_d - \eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d \times \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d \times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.10)$$

Uttrykket for en ulineær PD-regulator settes opp ved hjelp av (6.9) og (6.10):

$$\mathbf{u} = -K_p \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - K_d \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}. \quad (6.11)$$

Parametrene K_p og K_d er positive og kan tunes for best mulig ytelse.

6.3.1 Stabilitetsbevis

For å vise stabilitet for den ulineære regulatoren kan energibetraktninger benyttes. Ut i fra disse betraktningene finnes en Lyapunovfunksjon og dens deriverte, som videre benyttes til å påvise regulatorens stabilitet.

Satellittens energi

Satellittens energi kan deles inn i kinetisk og potensiell energi. Den kinetiske energien er hovedsaklig forårsaket av rotasjoner, mens den potensielle energien er forårsaket av gravitasjonsgradienten og gyroeffekter grunnet satellittens bane rundt jorda. Uttrykkene for kinetisk og potensiell energi er hentet fra [9].

Kinetisk energi Den mest interessante bevegelsen er rotasjonen av satellitten i BODY-systemet i forhold til ORBIT-systemet. Ved tilnærmet sirkulær bane rundt jorden, og dermed konstant vinkelendring ω_o , kan den kinetiske energien skrives

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ob}^b. \quad (6.12)$$

Potensiell energi Den potensielle energien grunnet gravitasjonsgradienten er

$$E_{gg} = \frac{3}{2}\omega_o^2 ((\mathbf{c}_3^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{c}_3^b - I_z) \quad (6.13)$$

hvor $\mathbf{c}_3^b$ vektoren er projeksjonen av z_o -aksen i BODY-systemet. Hvis BODY-systemet er innrettet etter ORBIT-systemet blir $E_{gg} = 0$. De største verdiene oppnås når z_b -aksen er i horisontalplanet og varierer fra

$$E_{gg}^x = \frac{3}{2}\omega_o^2 (I_x - I_z) \quad (6.14)$$

til

$$E_{gg}^y = \frac{3}{2}\omega_o^2 (I_y - I_z), \quad (6.15)$$

hvor E_{gg}^x og E_{gg}^y er energien når z_b -aksen er innrettet etter henholdsvis x_o - og y_o -aksen.

Grunnet satellittens bane rundt jorden fås en potensiell energi gitt som

$$E_{gyro} = \frac{1}{2}\omega_o^2 (I_x - (\mathbf{c}_1^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{c}_1^b) \quad (6.16)$$

hvor $\mathbf{c}_1^b$ vektoren er projeksjonen av x_o -aksen i BODY-systemet. Hvis BODY-systemet er innrettet etter ORBIT-systemet blir $E_{gyro} = 0$. Maksimumsverdiene varierer fra

$$E_{gyro}^z = \frac{1}{2}\omega_o^2 (I_x - I_z) \quad (6.17)$$

til

$$E_{gyro}^y = \frac{1}{2}\omega_o^2 (I_x - I_y), \quad (6.18)$$

hvor E_{gyro}^z og E_{gyro}^y er energien når x_b -aksen er innrettet etter henholdsvis z_o - og y_o -aksen.

Lyapunov funksjonen

Lyapunov funksjonen finnes ved å se på satellittens totale energi:

$$V = E_{kin} + E_{gg} + E_{gyro} \quad (6.19)$$

$$= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \frac{3}{2}\omega_o^2 ((\mathbf{c}_3^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{c}_3^b - I_z) + \frac{1}{2}\omega_o^2 (I_x - (\mathbf{c}_1^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{c}_1^b) \quad (6.20)$$

For at Lyapunov funksjonen skal være positiv definitt må det vises at:

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad (6.21)$$

$$V(\mathbf{x}) > 0 \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad (6.22)$$

For å få en bedre forståelse for ligning (6.20) kan de to siste leddene utvides:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \frac{3}{2}\omega_o^2 (I_x(c_{13}^b)^2 + I_y(c_{23}^b)^2 + I_z((c_{33}^b)^2 - 1)) \\ & - \frac{1}{2}\omega_o^2 (I_x((c_{11}^b)^2 - 1) + I_y(c_{21}^b)^2 + I_z(c_{31}^b)^2), \end{aligned} \quad (6.23)$$

hvor det er brukt at $\mathbf{c}_i^b = [c_{1i}^b \ c_{2i}^b \ c_{3i}^b]^\top$ og $(\mathbf{c}_i^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{c}_i^b = I_x(c_{1i}^b)^2 + I_y(c_{2i}^b)^2 + I_z(c_{3i}^b)^2$.

Siden rotasjonsmatrisen $\mathbf{R}_o^b$ er ortogonal må $\mathbf{c}_1^b$ og $\mathbf{c}_3^b$ tilfredsstille ligningene

$$(c_{11}^b)^2 + (c_{21}^b)^2 + (c_{31}^b)^2 = 1 \quad (6.24)$$

$$(c_{13}^b)^2 + (c_{23}^b)^2 + (c_{33}^b)^2 = 1 \quad (6.25)$$

Ligningene (6.24) og (6.25) brukes for å eliminere c_{11} og c_{33} , og uttrykket for Lyapunov funksjonen blir

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \frac{3}{2}\omega_o^2 ((I_x - I_z)(c_{13}^b)^2 + (I_y - I_z)(c_{23}^b)^2) \\ & - \frac{1}{2}\omega_o^2 ((I_x - I_y)(c_{21}^b)^2 + (I_x - I_z)(c_{31}^b)^2). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Ut fra ligning (6.26) fås det at V er en funksjon av $\mathbf{x} = [\boldsymbol{\omega}_{ob}^b, c_{21}^b, c_{31}^b, c_{13}^b, c_{23}^b]^\top$. Ved å sette $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ fås det at $V(\mathbf{0}) = 0$. For å forsikre at Lyapunovfunksjonen er positiv definitt som definert i ligning (6.22), må det kreves at

$$I_x > I_y > I_z. \quad (6.27)$$

Den deriverte av Lyapunov funksjonen, $\dot{V}$

Den tidsderivate av V er

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ob}^b + 3\omega_o^2 (\mathbf{c}_3^b)^\top \mathbf{I} \dot{\mathbf{c}}_3^b - \omega_o^2 (\mathbf{c}_1^b)^\top \mathbf{I} \dot{\mathbf{c}}_1^b. \quad (6.28)$$

Satellittdynamikken fra ligning (3.6) kan skrives

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b) \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{\tau}_g^b + \boldsymbol{\tau}_r^b, \quad (6.29)$$

hvor gravitasjonsgradienten $\boldsymbol{\tau}_g^b$ fra kapittel 3.1.2 kan skrives

$$\boldsymbol{\tau}_g^b = 3\omega_o^2 \mathbf{S}(\mathbf{c}_3^b) \mathbf{I} \mathbf{c}_3^b. \quad (6.30)$$

Ved å sette inn relasjonen $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \omega_o \mathbf{c}_1^b$ i satellittdynamikken fås

$$\mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{ob}^b = 3\omega_o^2 \mathbf{S}(\mathbf{c}_3^b) \mathbf{I} \mathbf{c}_3^b + \boldsymbol{\tau}_r^B - \mathbf{I} \omega_o \dot{\mathbf{c}}_1^b - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \omega_o \mathbf{c}_1^b) \mathbf{I} (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \omega_o \mathbf{c}_1^b) \quad (6.31)$$

Innsetting av ligning (6.31) i ligning (6.28) gir

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \left(3\omega_o^2 \mathbf{S}(\mathbf{c}_3^b) \mathbf{I} \mathbf{c}_3^b + \boldsymbol{\tau}_r^B - \mathbf{I} \omega_o \dot{\mathbf{c}}_1^b - \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \omega_o \mathbf{c}_1^b) \mathbf{I} (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \omega_o \mathbf{c}_1^b) \right) \\ & + 3\omega_o^2 (\mathbf{c}_3^b)^\top \mathbf{I} \dot{\mathbf{c}}_3^b - \omega_o^2 (\mathbf{c}_1^b)^\top \mathbf{I} \dot{\mathbf{c}}_1^b \end{aligned} \quad (6.32)$$

Ved å bruke at $(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b) = \mathbf{0}$ og $\dot{\mathbf{c}}_i^b = \mathbf{S}(\mathbf{c}_i^b) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b$ fås

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \left(3\omega_o^2 \mathbf{S}(\mathbf{c}_3^b) \mathbf{I} \mathbf{c}_3^b + \boldsymbol{\tau}_r^B - \omega_o \mathbf{I} \mathbf{S}(\mathbf{c}_i^b) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b - \omega_o \mathbf{S}(\mathbf{c}_i^b) \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ob}^b - \omega_o^2 \mathbf{S}(\mathbf{c}_i^b) \mathbf{I} \mathbf{c}_i^b \right) \\ & + 3\omega_o^2 (\mathbf{c}_3^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{S}(\mathbf{c}_3^b) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b - \omega_o^2 (\mathbf{c}_1^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{S}(\mathbf{c}_1^b) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b \end{aligned} \quad (6.33)$$

Siden $\mathbf{S}^\top(\mathbf{x}) = -\mathbf{S}(\mathbf{x})$ og $\dot{V}$ er en skalar, vil uttrykket i ligning (6.33) reduseres til det enkle uttrykket

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \boldsymbol{\tau}_r^b \quad (6.34)$$

Ved å sette inn regulatoren fra ligning (6.11) for $\boldsymbol{\tau}_r^b$ fås

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top (-K_p \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - K_d \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \quad (6.35)$$

Innsetting av uttrykkene for $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ og $\dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ fra ligning (6.9) og (6.10) gir

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top (-K_p (\eta_d \boldsymbol{\varepsilon} - \eta \boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d \times \boldsymbol{\varepsilon}) \\ & - K_d (\dot{\eta}_d \boldsymbol{\varepsilon} + \eta_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\eta} \boldsymbol{\varepsilon}_d - \eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d \times \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d \times \dot{\boldsymbol{\varepsilon}})) \end{aligned} \quad (6.36)$$

Ved å sette inn ligningene for kinematikken til satellitten, dvs. ligning (2.31) og (2.32), fås

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top (-K_p (\eta_d \boldsymbol{\varepsilon} - \eta \boldsymbol{\varepsilon}_d - \boldsymbol{\varepsilon}_d \times \boldsymbol{\varepsilon}) - K_d (\dot{\eta}_d \boldsymbol{\varepsilon} + \eta_d (\frac{1}{2}(\eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b) \\ & - (\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\omega}_{ob}^b) \boldsymbol{\varepsilon}_d - \eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d \times \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_d \times (\frac{1}{2}(\eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b))) \end{aligned} \quad (6.37)$$

Ved hjelp av regelen om kryssprodukt, $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{a} := \mathbf{S}(\boldsymbol{\lambda})\mathbf{a}$, kan uttrykket skrives

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top (-K_p(\eta_d \boldsymbol{\varepsilon} - \eta \boldsymbol{\varepsilon}_d - \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}_d) \boldsymbol{\varepsilon}) - K_d(\dot{\eta}_d \boldsymbol{\varepsilon} + \eta_d (\frac{1}{2}(\eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b) \\ & - (-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\omega}_{ob}^b) \boldsymbol{\varepsilon}_d - \eta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d - \mathbf{S}(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d) \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon}_d) (\frac{1}{2}(\eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\boldsymbol{\varepsilon})) \boldsymbol{\omega}_{ob}^b))) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Man kan ikke uten videre si at $\dot{V} < 0$ i ligning (6.38). For å få kortet ned uttrykket i ligning (6.38) bør Lyapunovfunksjonen endres ved å legge til flere ledd.

For enkelhets skyld settes referansen i regulatoren lik null slik at uttrykket i ligning (6.35) blir

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top (-K_p \boldsymbol{\varepsilon} - K_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (6.39)$$

Ved å legge til et ledd til Lyapunovfunksjonen i ligning (6.20) oppnås

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \frac{3}{2} \omega_o^2 ((\mathbf{c}_3^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{c}_3^b - I_z) + \frac{1}{2} \omega_o^2 (I_x - (\mathbf{c}_1^b)^\top \mathbf{I} \mathbf{c}_1^b) + K_p(\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} + (1 - \eta)^2), \quad (6.40)$$

hvor $K_p(\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} + (1 - \eta)^2)$ er det nye leddet. Dette siste leddet kan ved å gange ut parantesen skrives

$$K_p(\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} + 1 - 2\eta + \eta^2). \quad (6.41)$$

og ved å benytte sammenhengen $\boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\varepsilon} + \eta^2 = 1$ blir det

$$2K_p(1 - \eta). \quad (6.42)$$

Den deriverte av ligning (6.42) er

$$-2K_p \dot{\eta} \quad (6.43)$$

og ved å sette inn for $\dot{\eta}$ fra kinematikken i ligning (2.31) fås

$$K_p \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\omega}_{ob}^b. \quad (6.44)$$

Den deriverte av Lyapunovfunksjonen med det ekstra leddet blir

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top (\boldsymbol{\tau}_r^b + K_p \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (6.45)$$

Ved å sette inn regulatoren med nullreferanse for $\boldsymbol{\tau}_r^b$ vil et ledd av regulatoren forkortes bort:

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top (-K_p \boldsymbol{\varepsilon} - K_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + K_p \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (6.46)$$

$$\dot{V} = (\boldsymbol{\omega}_{ob}^b)^\top (-K_d \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (6.47)$$

Da gjenstår å vise at ligning (6.47) er negativ definit. Innsetting av kinematikken fra ligning (2.32) for $\dot{\epsilon}$ gir

$$\dot{V} = (\omega_{ob}^b)^\top (-K_d \frac{1}{2} (\eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\epsilon))) \omega_{ob}^b \quad (6.48)$$

Med nullreferanse vil systemet være stabilt for positive verdier av $(\eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\epsilon))$. Determinanten til dette uttrykket må være positiv, noe som gir at

$$\eta(\eta^2 + \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) \quad (6.49)$$

må være positiv. Dette er kun gyldig når $\eta = \cos \frac{\beta}{2}$, gitt i ligning (2.20), er positiv, dvs. $-\frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{4}$. Det kan ikke sies noe om stabiliteten til den ulineære regulatoren ut i fra dette, siden η kan være både positiv og negativ. Å bevise stabilitet ved hjelp av Lyapunovanalyse kan bli en meget kompleks oppgave. Det kan være mer hensiktsmessig å utvikle en regulator ved hjelp av Lyapunovanalyse, istedenfor å bevise stabilitet for en allerede eksisterende regulator. På denne måten kan uønskede ledd kortes bort ved å legge disse til i regulatoren. Utvikling av et fullstendig stabilitetsbevis for den ulineære regulatoren vil bli overlatt til videre arbeid med satellitten.

6.4 Sliding Mode regulator

Det ønskes å utvikle en sliding mode regulator som er robust med tanke på usikkerheter i satellittmodellen og eksterne forstyrrelser. I [4] er en dekoplet sliding mode regulator og observer basert på kvaternioner beskrevet. Det tas her utgangspunkt i regulatordelen av denne. Tilstandene ϵ og ω_{ob}^b antas som kjent for regulatoren. Mer generelt om sliding mode er tilgjengelig i [2].

Satellittens dynamiske modell gitt i ligning (3.6) kan skrives som

$$\mathbf{I} \dot{\omega}_{ob}^b = -\mathbf{\Omega} \mathbf{I} \omega_{ob}^b + \tau^b, \quad (6.50)$$

hvor $\mathbf{I}$ er treghetsmatrisen, ω_{ob}^b er vinkelhastigheten til b-systemet relativt o-systemet representert i b-systemet, $\mathbf{\Omega}$ er den skjevsymmetriske matrisen $\mathbf{S}(\omega_{ob}^b)$ og τ^b er pådraget. Kinematikken til satellitten uttrykt i kvaternioner er gitt i ligning (2.31) og (2.32). Her defineres matrisen $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ som

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \eta \mathbf{1} + \mathbf{S}(\epsilon), \quad (6.51)$$

hvor $\mathbf{q}$ er kvaternionet definert i (2.22), η er den reelle og ϵ er vektordelen til kvaternionet, $\mathbf{1}$ er identitetsmatrisen og $\mathbf{S}(\epsilon)$ er den skjevsymmetriske matrisen

til $\boldsymbol{\varepsilon}$. Dette gir:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \eta & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 & \eta & -\varepsilon_1 \\ -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \eta \end{bmatrix}. \quad (6.52)$$

Kinematikken kan ved innsetting av ligning (6.51) i (2.32) skrives som:

$$\dot{\eta} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\omega}_{ob}^b \quad (6.53)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\mathbf{M}(\mathbf{q})\boldsymbol{\omega}_{ob}^b \quad (6.54)$$

Det dekoklede trackingregulator problemet kan formuleres som

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\boldsymbol{\varepsilon}_d(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t)\| = 0, \quad (6.55)$$

hvor $\boldsymbol{\varepsilon}_d(t)$ er den ønskede tracking profilen. Avviket til kvaternionet $\boldsymbol{\varepsilon}_e(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_d(t) - \boldsymbol{\varepsilon}(t)$ skal gå mot null, det vil si at hver komponent i $\boldsymbol{\varepsilon}_e(t)$ må gå mot null.

For å designe en dekoklet sliding mode trackingregulator må to operasjoner gjennomføres:

- Finne passende **sliding manifold** $\boldsymbol{\sigma}$.
- Finne et pådrag som garanterer at overflaten $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ nås på endelig tid og holdes deretter.

Det velges her samme **sliding manifold** som beskrevet i [4]:

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{0}, \quad (6.56)$$

hvor $\mathbf{K}$ er en diagonal positiv matrise og $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. For å unngå å bruke den deriverte av kvaternionet kan avviket $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$ skrives som:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d - \frac{1}{2}\mathbf{M}\boldsymbol{\omega}_{ob}^b, \quad (6.57)$$

hvor $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{q})$.

For å finne et pådrag som garanterer at overflaten $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ nås på endelig tid og holdes deretter, skrives systemet på formen:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\ddot{\boldsymbol{\varepsilon}}_d - \frac{1}{2}\dot{\eta}\boldsymbol{\omega}_{ob}^b + \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_{ob}^b - \frac{1}{2}\mathbf{M}\mathbf{I}^{-1}\boldsymbol{\tau}^b + \mathbf{K}\boldsymbol{\varepsilon}_e \right]. \quad (6.58)$$

For å få asymptotisk stabilitet for $\sigma = \mathbf{0}$ velges følgende Lyapunovkandidat:

$$V = \frac{1}{2} \sigma^T \mathbf{I} \mathbf{M}^{-1} \sigma > 0, \quad (6.59)$$

hvor $\mathbf{I} \mathbf{M}^{-1}$ er en symmetrisk positiv definit matrise. Den deriverte av V blir:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sigma^T - \frac{1}{2} \mathbf{I} \mathbf{M}^{-1} \dot{\eta} \omega_{ob}^b + \frac{1}{2} \Omega \mathbf{I} \omega_{ob}^b + \mathbf{I} \mathbf{M}^{-1} \ddot{\epsilon}_d \\ & + \mathbf{I} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \dot{\epsilon}_e - \frac{1}{2} \tau^b + \dot{\mathbf{I}} \mathbf{M}^{-1} \sigma + \mathbf{I} \dot{\mathbf{M}}^{-1} \sigma. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Ved å velge pådraget på formen:

$$\tau^b = \mathbf{u}_{eq} + \rho \mathbf{sign}(\sigma) \quad (6.61)$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{eq} = & -\mathbf{I} \mathbf{M}^{-1} \dot{\eta} \omega_{ob}^b + \Omega \mathbf{I} \omega_{ob}^b + 2\mathbf{I} \mathbf{M}^{-1} \ddot{\epsilon}_d \\ & + 2\mathbf{I} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \dot{\epsilon}_e + 2\dot{\mathbf{I}} \mathbf{M}^{-1} \sigma + 2\mathbf{I} \dot{\mathbf{M}}^{-1} \sigma \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\mathbf{sign}(\sigma) = \begin{bmatrix} \text{sign}(\sigma_1) & \text{sign}(\sigma_2) & \text{sign}(\sigma_3) \end{bmatrix}^T \quad (6.63)$$

og $\rho > 0$, fås det at:

$$\dot{V} = -\sigma^T \rho \mathbf{sign}(\sigma) = -\rho \sum_{i=1}^3 |\sigma_i|, \quad (6.64)$$

hvor $\dot{V}$ da er negativ definit for hver enkelt komponent av σ . Dette garanterer eksistensen til den ønskede dekkoblede sliding mode regulatoren. Siden $\mathbf{u}_{eq}$ er en meget innviklet og kostbar funksjon å implementere ønskes det å benytte et enklere pådrag. I tillegg må chatteringproblemet elimineres. Den enklere modellen blir satt lik:

$$u_i = U_i^{MAX} \mathbf{sat}\left(\frac{\sigma_i}{\Phi}\right) \quad \forall i = 1, 3 \quad (6.65)$$

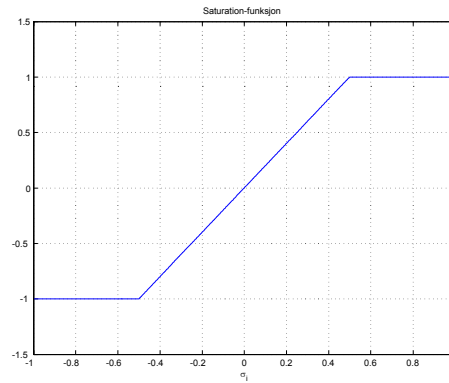
hvor Φ er tykkelsen på **sliding boundary layer** og

$$U_i^{MAX} \geq |u_{ieq}| + \rho. \quad (6.66)$$

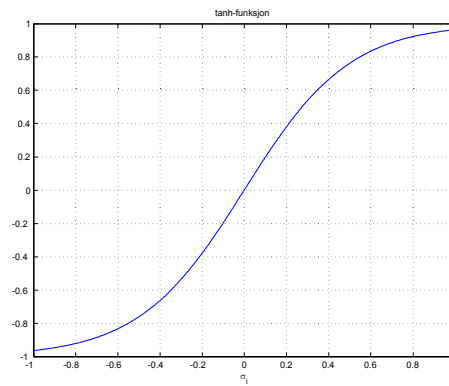
Her er *sign*-funksjonen erstattet med en *saturation*-funksjon. Dette er gjort for å prøve å unngå problemet med chattering.

$$\mathbf{sat}\left(\frac{\sigma_i}{\Phi}\right) = \begin{cases} 1 & \text{for } \sigma_i > \Phi \\ \frac{\sigma_i}{\Phi} & \text{for } |\sigma_i| \leq |\Phi| \\ -1 & \text{for } \sigma_i < -\Phi \end{cases} \quad (6.67)$$

Med $\Phi = 0.5$ blir *saturation*-funksjonen som vist i figur 6.1. Denne funksjonene kan byttes ut med en *tanh*-funksjon hvis en jevnere kurve ønskes, som vist i figur 6.2. I simuleringene er det *tanh*-funksjonen som blir benyttet.



Figur 6.1: *Saturation*-funksjon med boundary layer $\Phi = 0.5$.



Figur 6.2: Funksjonen $\tanh\left(\frac{\sigma_i}{\Phi}\right)$ med boundary layer $\Phi = 0.5$.

Sliding mode regulatoren beskrevet her utnytter ikke fullt ut bruken av kvaternionrepresentasjonen. Å utvikle en regulator som fullt ut utnytter denne kan være forslag til videre arbeid. En sliding mode regulator kan gi svært nøyaktig regulering ved å velge et smalt boundary layer, men dette fører til hardere pådragsbruk og mer slitasje på reaksjonshjulene.

6.5 Sammenligning av regulatorene

De tre ulike regulatorene beskrevet i dette kapitlet er nøye sammenlignet i simuleringskapitlet 7.1. Hver regulator blir nøye testet ved ulike sprang, tap av reaksjonshjul og med støy.

I tillegg er det ønskelig å se hvor fort det går an å dreie satellitten med regulatortype og reaksjonshjulenes maksimale moment som parametre. Det er gjort simuleringer på dette i kapittel 7.5. Simuleringene er gjort med samme regulatorparametre som benyttet i 7.1.

Kapittel 7

Simuleringer

I dette kapitlet skal regulatorene som ble presentert i forrige kapittel simuleres ved hjelp av Matlab og Simulink. Kildekoden som blir benyttet finnes i tillegg A og simulinkdiagrammene i tillegg B.

Det tas utgangspunkt i de fysiske parametrene til satellitten NSAT-1. Denne satellitten har dimensjonene 50x55x70 cm³ og treghetsmatrisen:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} [kgm^2] .$$

Satellittens masse er 60 kg.

I simuleringsfigurene er referansetrajektorene representert med en heltrukken linje, mens orienteringsvinklene ϕ , θ og ψ er representert ved prikket/stiplet, stiplet og prikket linje.

7.1 Simuleringer med tetraeder i satellittens tyngdepunkt

Her skal satellitten simuleres med reaksjonshjul plassert i tetraederkonfigurasjon i satellittens tyngdepunkt. Reaksjonshjulenenes maksimale dreiemoment er satt til $\tau_{\max} = 0.01 \text{ Nm}$. For å holde vinkelhastigheten under $\omega_s = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ velges en referansem modell med $\omega_n = 0.022$. Referansen blir gitt som et sprang i orienteringen for hver akse, henholdsvis $\phi = 30^\circ$, $\theta = 20^\circ$ og $\psi = 10^\circ$. Regulatorene skal prøve å følge den genererte trajektoren både med og uten støy og ved bortfall av ett eller to tilfeldige reaksjonshjul. Det vil også bli satt to store sprang i rullvinkelen på 80° og 140° grader for å sjekke regulatorenenes robusthet.

7.1.1 Simulering med lineær regulator

Figur 7.1 (øverst) viser systemet simulert uten støypåvirkning. Reguleringen om samtlige akser fungerer særdeles godt med den lineære regulatoren. Det kan observeres at orienteringsvinklene ligger noe under referansen i begynnelsen av stigningen, mens de ligger noe over mot slutten av stigningen til kurvene flater ut.

Figur 7.1 (nederst) viser at vinkelhastigheten holder seg innenfor grensene gitt av båndbredden til stjernesensoren. Utgangen fra den lineære regulatoren er vist i figur 7.2 (øverst), mens pådraget på reaksjonshjulene etter pådragsallokering er vist i figur 7.2 (nederst).

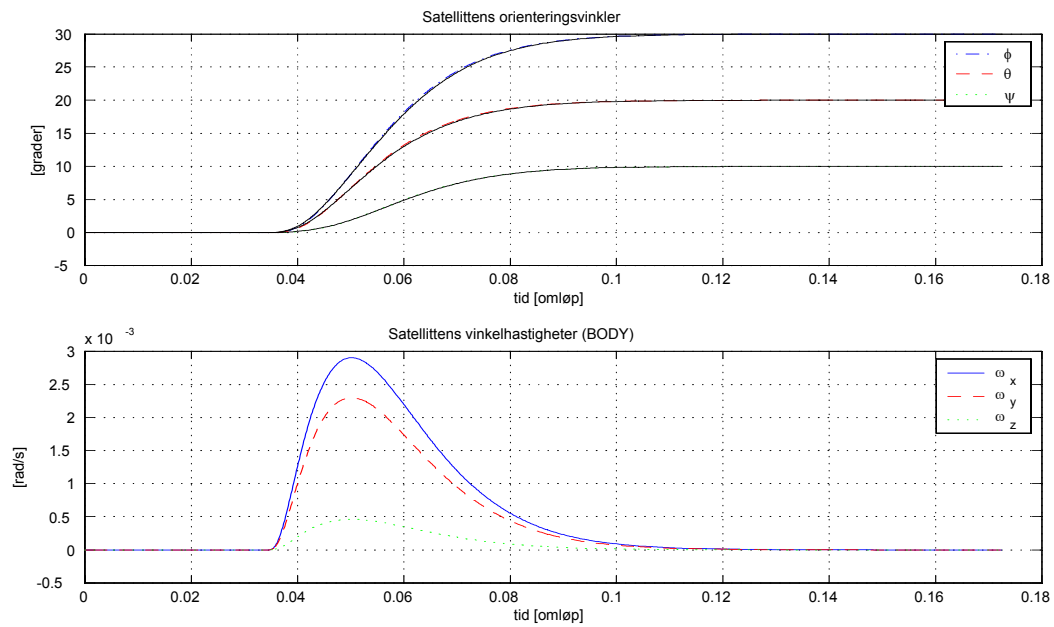
I figur 7.3 og 7.4 vises systemet simulert med støypåvirkning tilsvarende 40% av det genererte momentet. Dette er en støy som typisk kommer fra reaksjonshjulene selv. Denne støyen har liten eller ingen påvirkning på orienteringen. Det er tydelig at regulatoren er meget robust og takler forstyrrelser svært godt.

Figur 7.5 (øverst) viser hvordan systemet reagerer ved tap av ytelse fra ett reaksjonshjul. Systemet har ingen problemer med å følge referansetrajektoren. Det kan observeres at orienteringsvinklene ligger en del under referansen i begynnelsen av stigningen. Dette skyldes at tre reaksjonshjul ikke kan gi den samme hurtige responsen som fire reaksjonshjul. Men bortsett fra denne noe tregere starten følger orienteringsvinklene referansen meget godt. Det blir her en noe høyere maksimal vinkelhastighet grunnet denne trege starten, se figur 7.5 (nederst). Figur 7.6 (nederst) viser pådragene til de tre fungerende reaksjonshjulene.

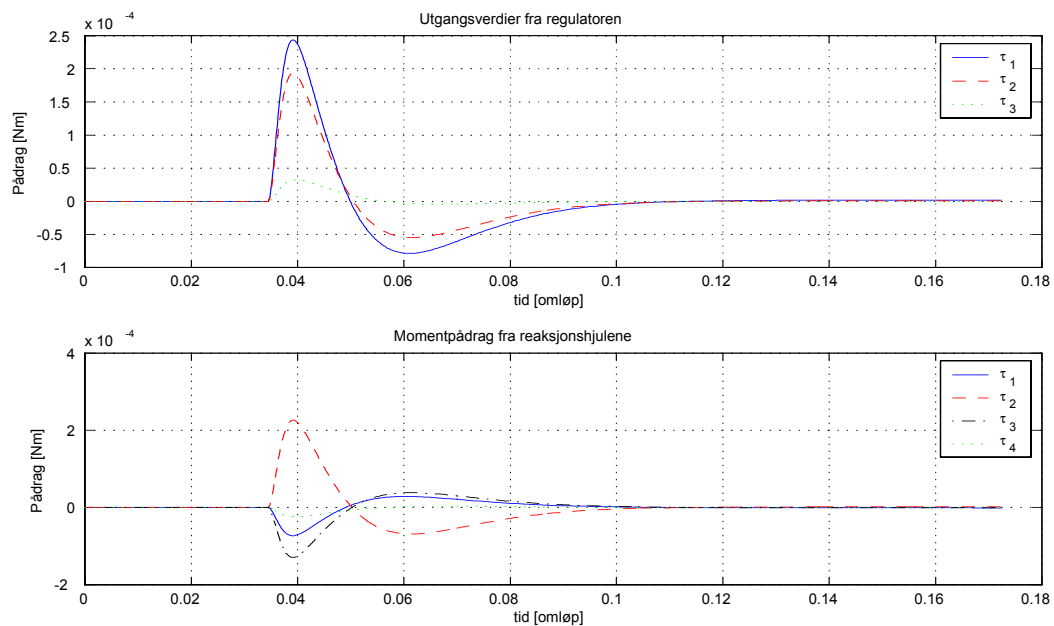
Figur 7.7 (øverst) viser hvordan systemet reagerer ved tap av ytelse fra to reaksjonshjul. Systemet klarer ikke å følge referansetrajektoren. Vinklene θ og ψ stabiliserer seg med stasjonære avvik på henholdsvis 1.7° og -5° , mens ϕ kun nærmer seg sin referanse minimalt. Her er det reaksjonshjul 3 og 4 som er gjort inaktive, tap av andre reaksjonshjul ville gitt en helt annen oppførsel. Ved tap av to reaksjonshjul er det ikke mulig å oppnå full regulering om alle akser, noe som tydelig illustreres her. Figur 7.8 (nederst) viser pådragene til de to fungerende reaksjonshjulene.

Til slutt blir systemet utsatt for to store sprang i rullvinkelen for å teste den lineære regulatorens robusthet. I figur 7.9 utsettes systemet for et sprang på 80° , mens det i figur 7.11 blir utsatt for et sprang på 140° . Den lineære regulatoren takler spranget på 80° meget bra. Spranget på 140° derimot takler den dårlig, det oppstår svingninger og systemet blir direkte ustabilt. Svingningene oppstår når utgangsverdiene fra den lineære regulatoren nærmer seg null. Det oppstår små svingninger allerede ved $tid = 0.16$ omløp, se figur 7.12, mens svingningene ikke er merkbare i figur 7.11 før $tid = 0.26$ omløp.

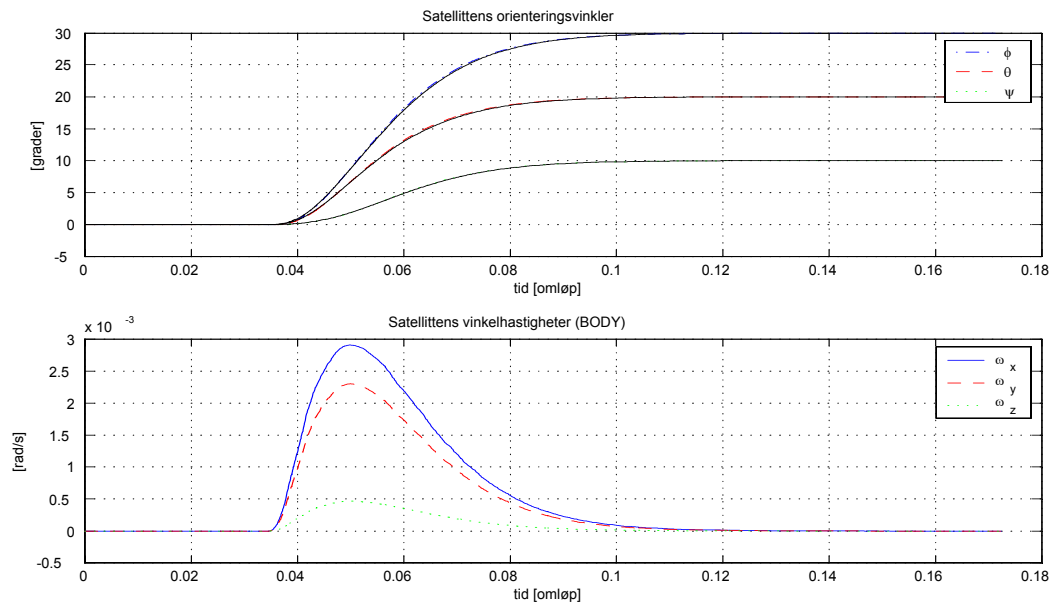
Siden den lineære regulatoren er linearisert om orienteringen ($\phi = 0, \theta = 0, \psi = 0$) kan det ikke ventes at stabilitet oppnås ved store avstander fra dette. For å oppnå stabilitet med den lineære regulatoren for alle satellittens orienteringer, bør modellen lineariseres om flere arbeidspunkt. Det må da settes kriterier for når de ulike arbeidspunktene skal benyttes, slik at regulatoren hele tiden kan operere i nærheten av et arbeidspunkt.



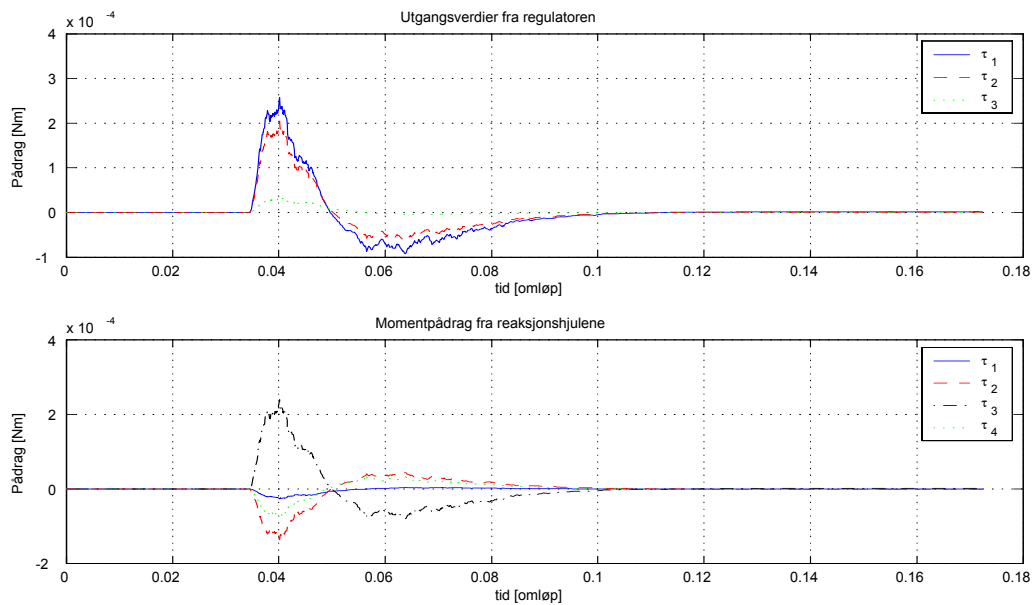
Figur 7.1: Systemrespons for lineær regulator uten støy.



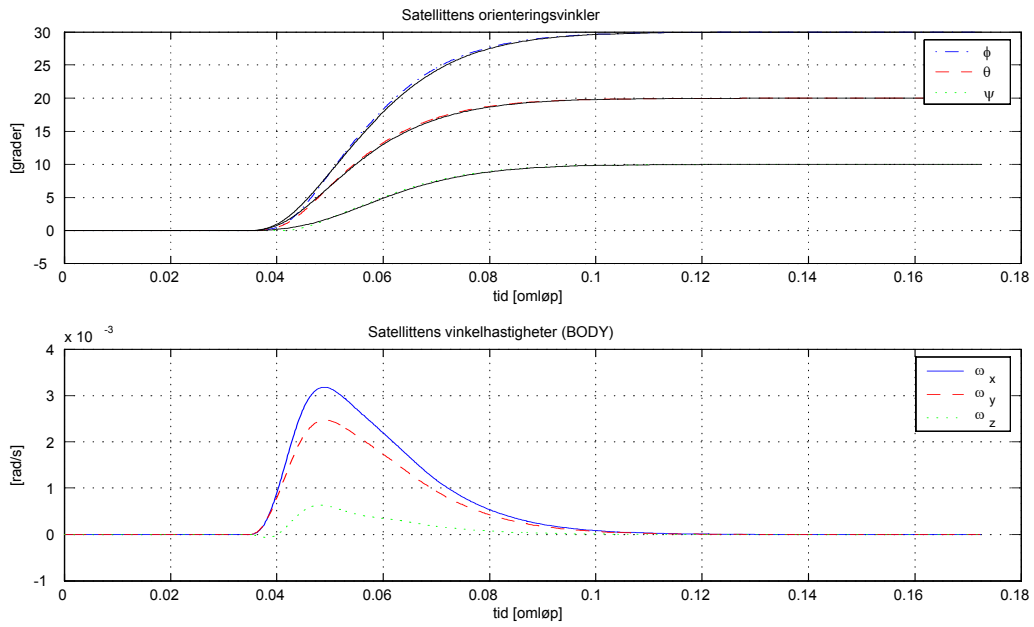
Figur 7.2: Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul uten støy.



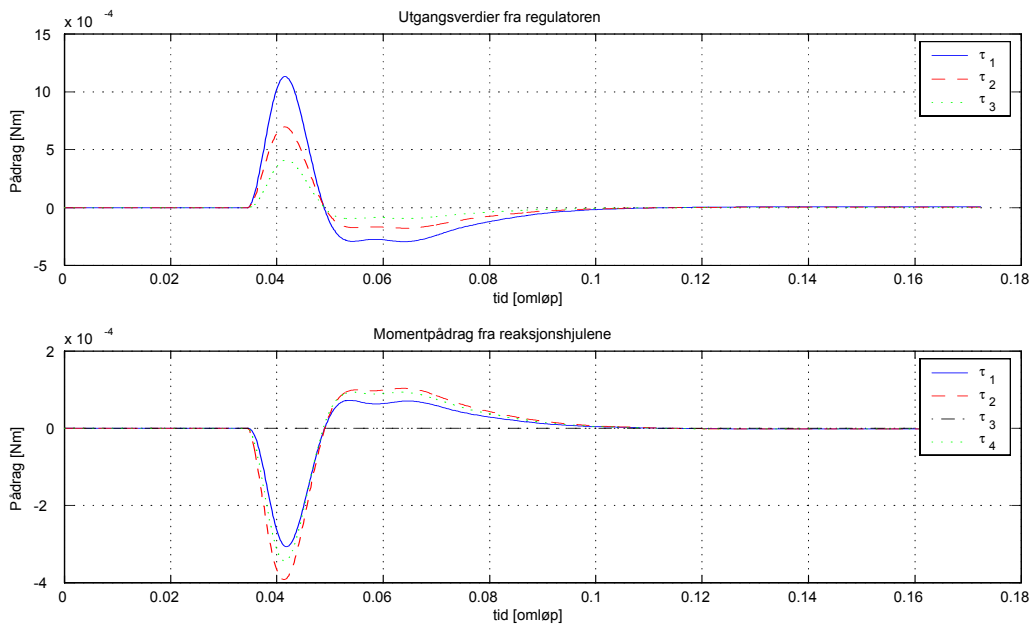
Figur 7.3: Systemrespons for lineær regulering med støy.



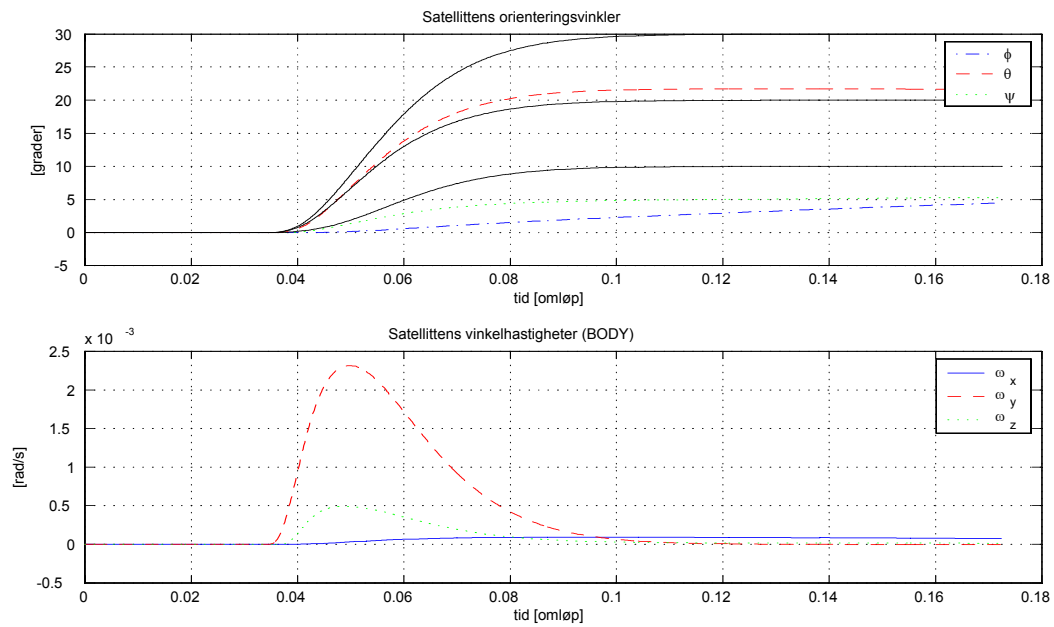
Figur 7.4: Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med støy.



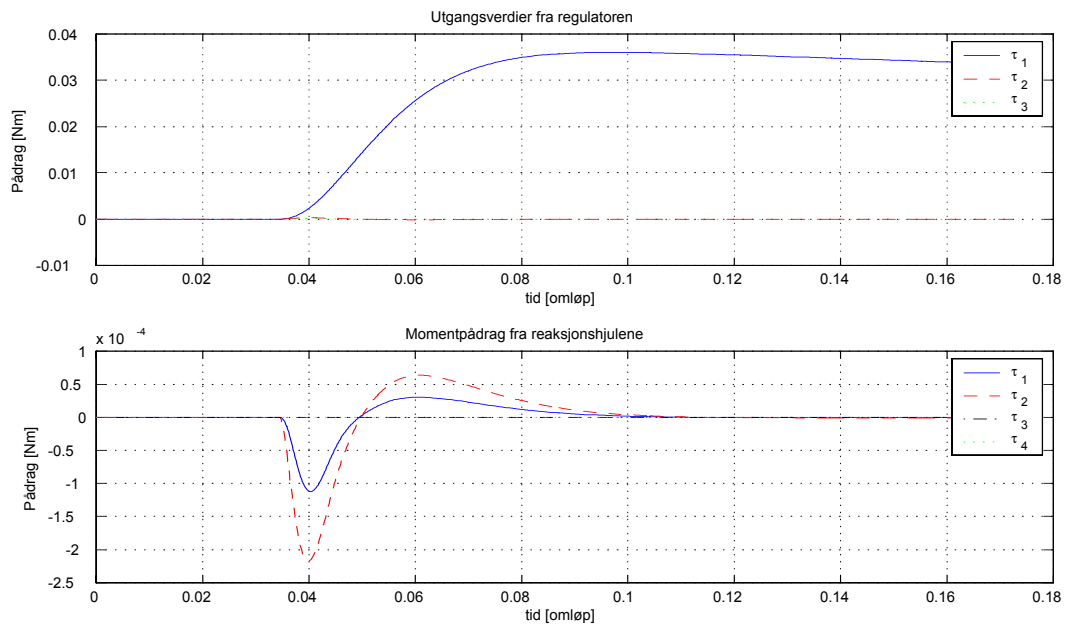
Figur 7.5: Systemrespons for lineær regulator ved tap av ett reaksjonshjul.



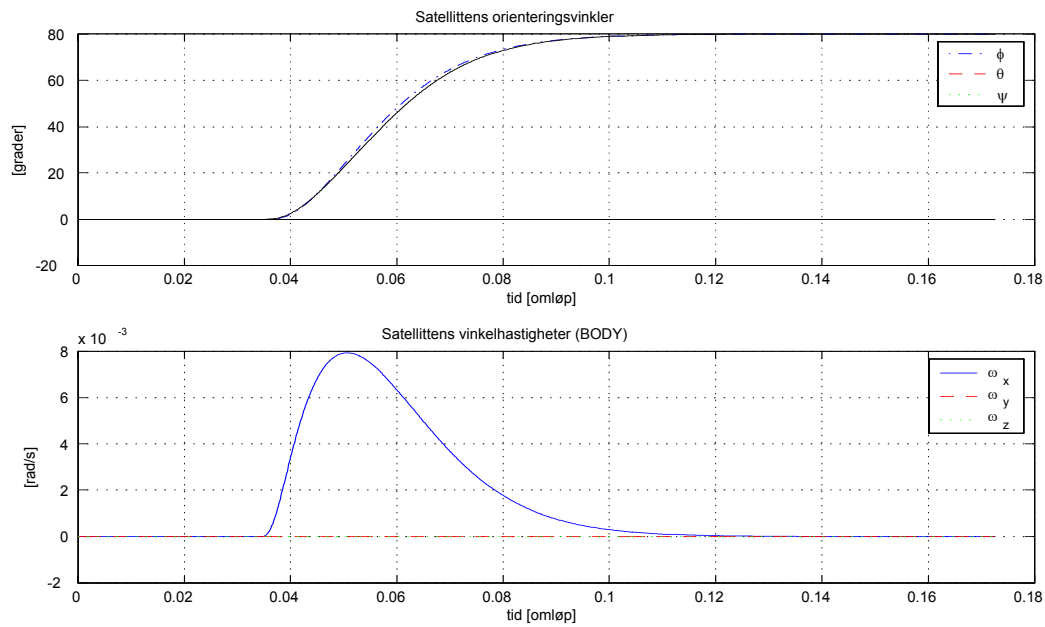
Figur 7.6: Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved tap av ett reaksjonshjul.



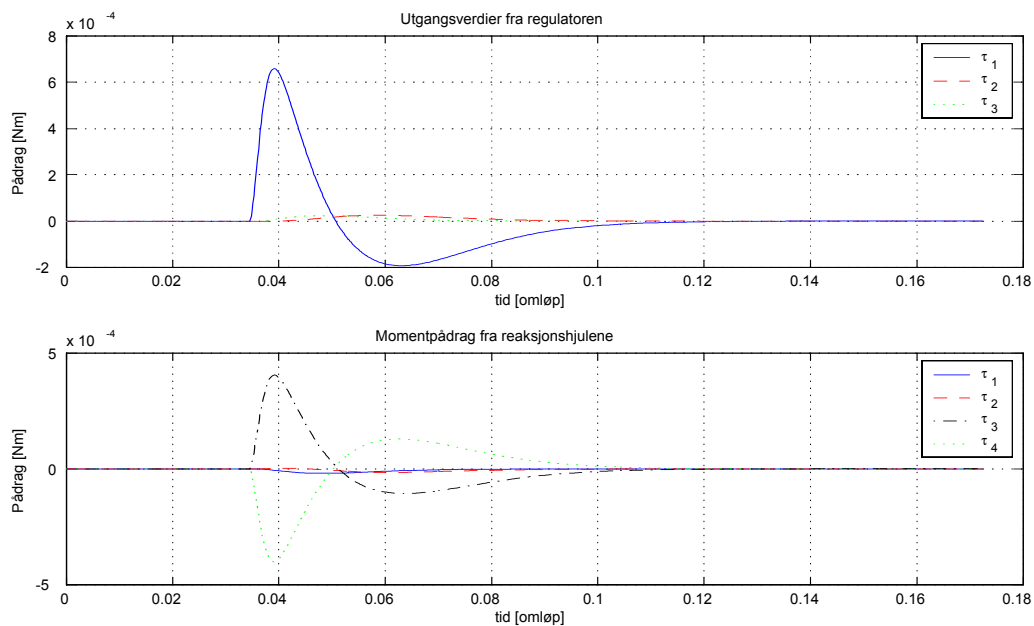
Figur 7.7: Systemrespons for lineær regulator ved tap av to reaksjonshjul.



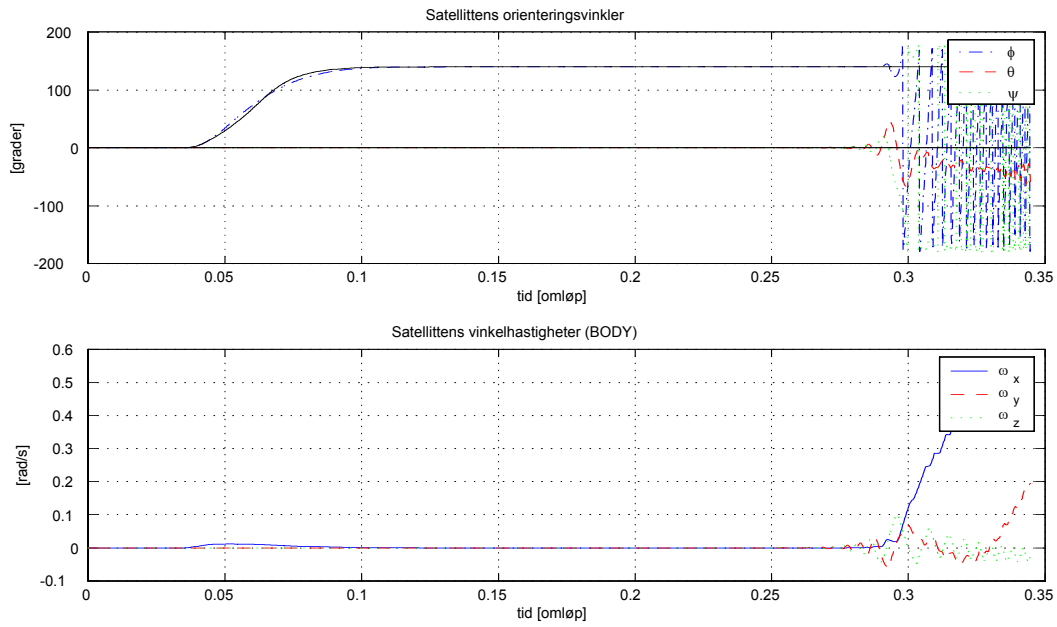
Figur 7.8: Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved tap av to reaksjonshjul.



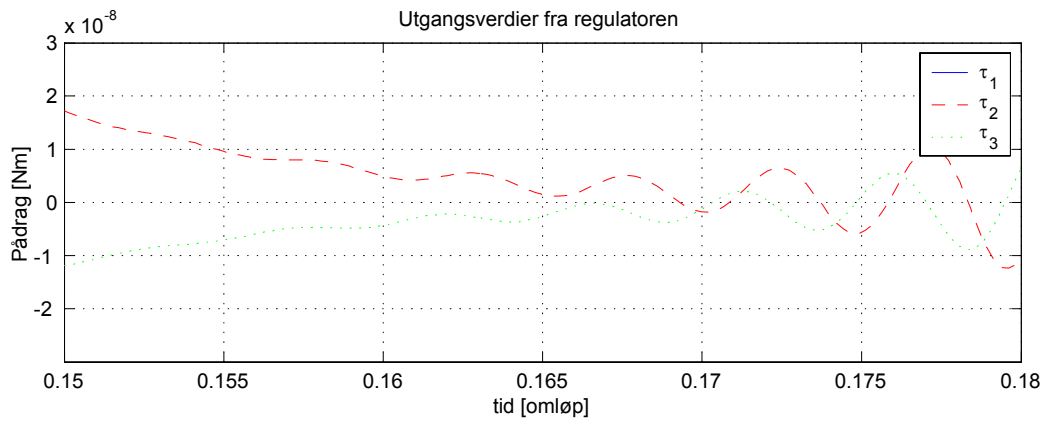
Figur 7.9: Systemrespons for lineær regulator ved sprang i ϕ på 80° .



Figur 7.10: Utgangsverdier fra lineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 80° .



Figur 7.11: Systemrespons for lineær regulator ved sprang i ϕ på 140° .



Figur 7.12: Utgangsverdier fra lineær regulator ved sprang i ϕ på 140° .

7.1.2 Simulering med ulineær regulator

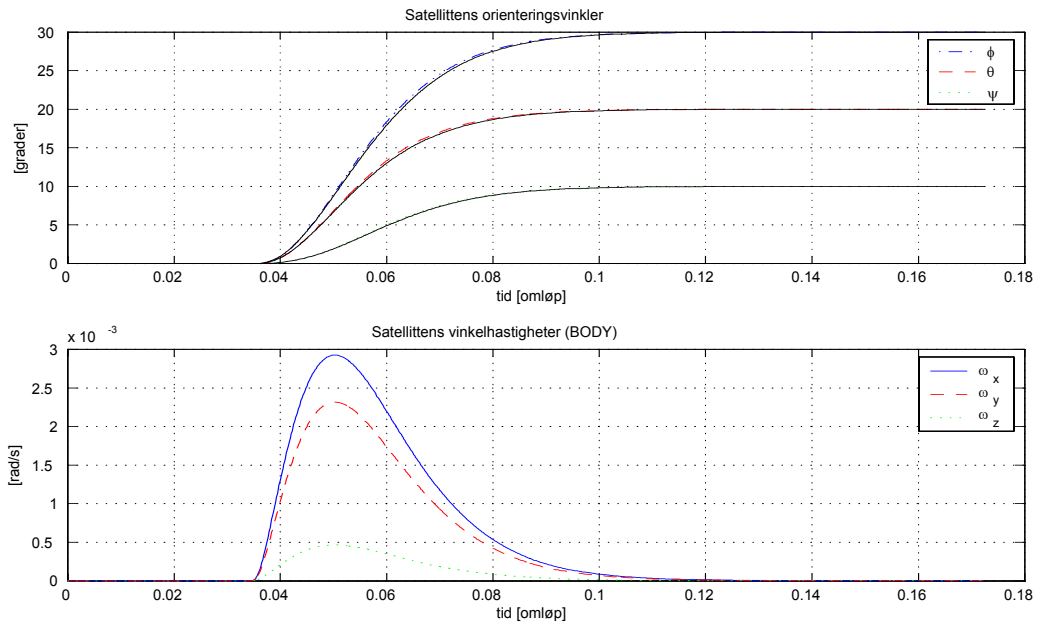
I følgende simuleringer blir regulatorparametrene til den ulineære regulatoren satt som:

$$K_p = 0.5 \quad K_d = 2.5.$$

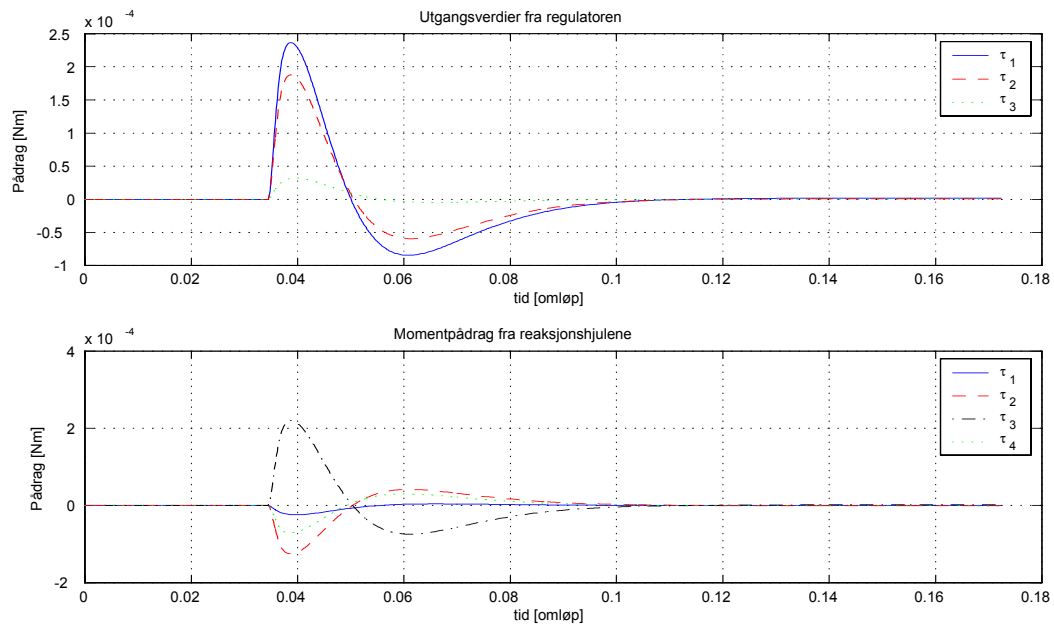
Figur 7.13 (øverst) viser systemet simulert uten støypåvirkning. Reguleringen fungerer svært godt for den ulineære regulatoren. I motsetning til den lineære regulatoren ligger orienteringsvinklene her over referansetrajektoren under nesten hele stigningen. Dette har ingen praktisk betydning for oppførselen til satellitten. Figur 7.15 (øverst) viser systemet simulert med samme støy som den lineære regulatoren. Det kan observeres at også den ulineære regulatoren er svært robust og takler forstyrrelser meget godt. Utgangsverdier fra den ulineære regulatoren og pådrag fra reaksjonshjulene med og uten støy er vist i figur 7.14 og 7.16.

Figur 7.17 (øverst) viser at systemet fungerer tilnærmet like godt selv om ett av reaksjonshjulene slutter å fungere. Det er ingen synlige forskjeller, bortsett fra at systemet reagerer litt tregere i starten og får en noe høyere maks vinkelhastighet, se figur 7.17 (nederst). Figur 7.19 (øverst) viser hvordan den ulineære regulatoren reagerer når to av reaksjonshjulene slutter å fungere. Orienteringsvinklene θ og ψ følger referansetrajektoren helt perfekt og holder den ønskede orientering, mens vinkelen ϕ ikke kommer til ønsket orientering selv ved uendelig tidshorisont, se figur 7.21. Figur 7.18 (nederst) og 7.20 (nederst) viser pådragene fra de fungerende reaksjonshjulene.

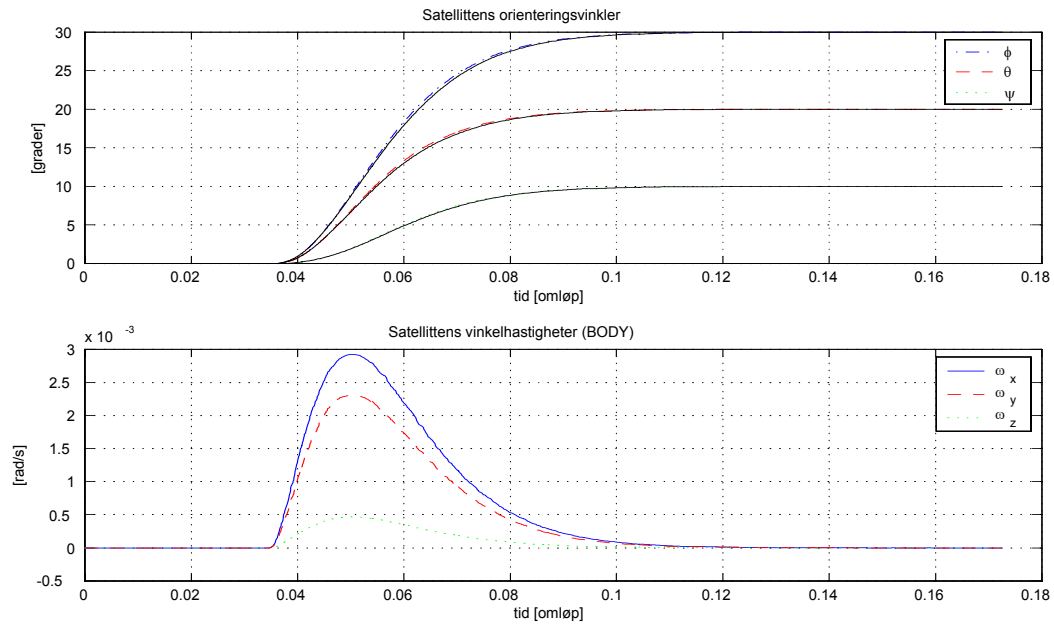
Til slutt blir systemet utsatt for to sprang i rullvinkelen for å teste den ulineære regulatorens robusthet. Både spranget på 80° , figur 7.22, og spranget på 140° , figur 7.24, ble taklet meget bra av den ulineære regulatoren. Det kan observeres et stort oversving ved spranget på 140° . Orienteringsvinklene ligger mye høyere enn referansetrajektoren under stigningen, men forskjellen jevner seg ut i det referansetrajektoren flater ut. Dette oversvinget vil ikke ha noen særlig betydning for satellittens orientering. Utgangsverdier fra regulatoren og pådrag fra reaksjonshjulene er vist i figur 7.23 og 7.25. Den ulineære regulatoren tåler sprang mye bedre enn den lineære regulatoren, da førstnevnte ikke blir ustabil ved sprang på 140° . Ved store sprang i referansen er den ulineære regulatoren meget robust.



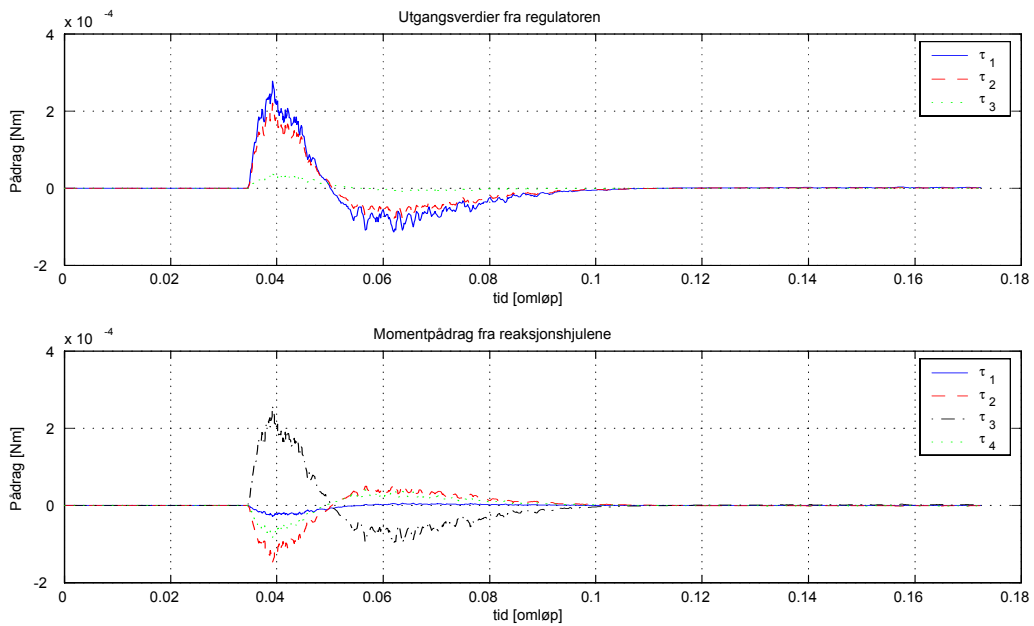
Figur 7.13: Systemrespons for ulineær regulator uten støy.



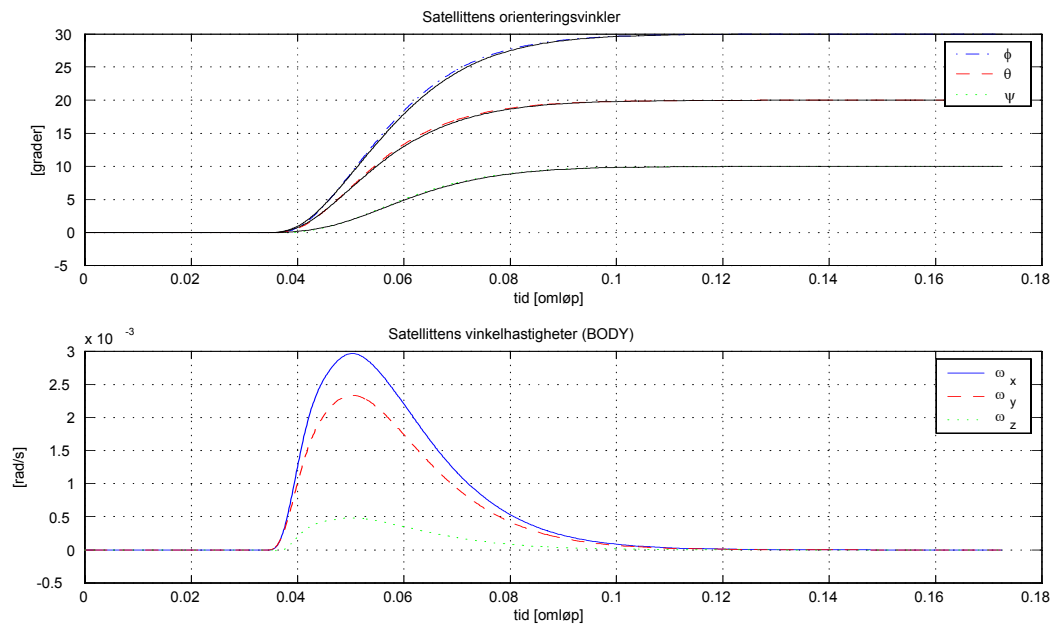
Figur 7.14: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul uten støy.



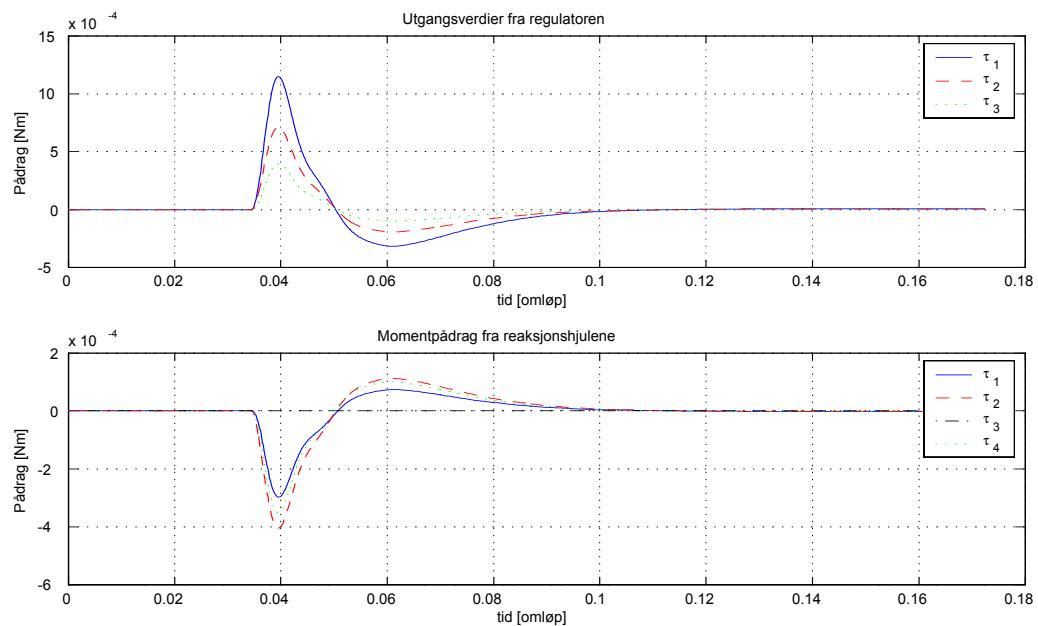
Figur 7.15: Systemrespons for ulineær regulator med støy.



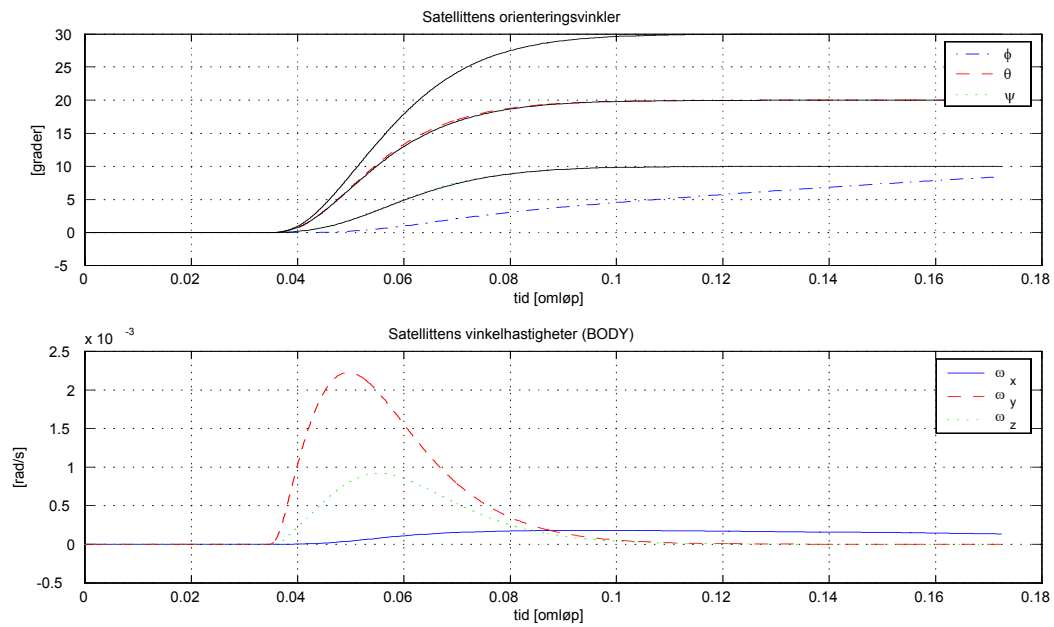
Figur 7.16: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med støy.



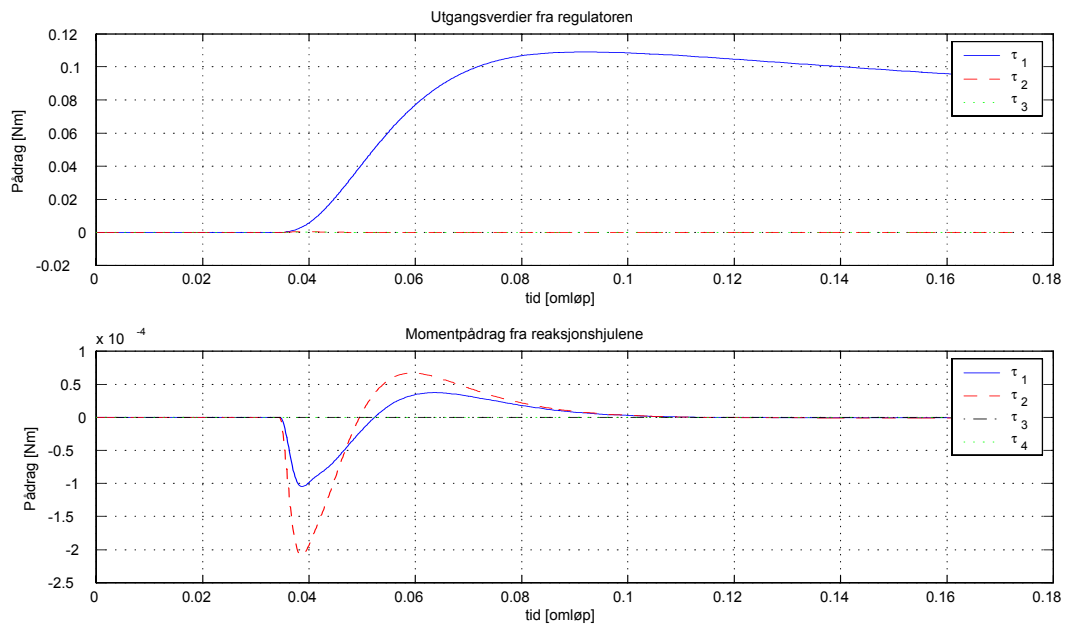
Figur 7.17: Systemrespons for ulineær regulator ved tap av ett reaksjonshjul.



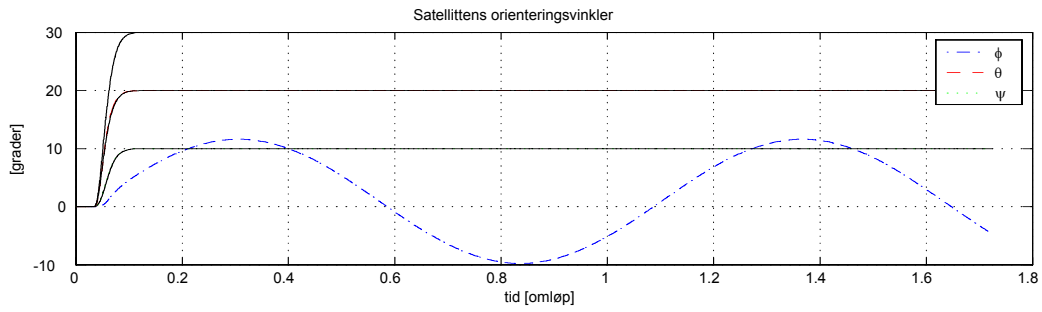
Figur 7.18: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved tap av ett reaksjonshjul.



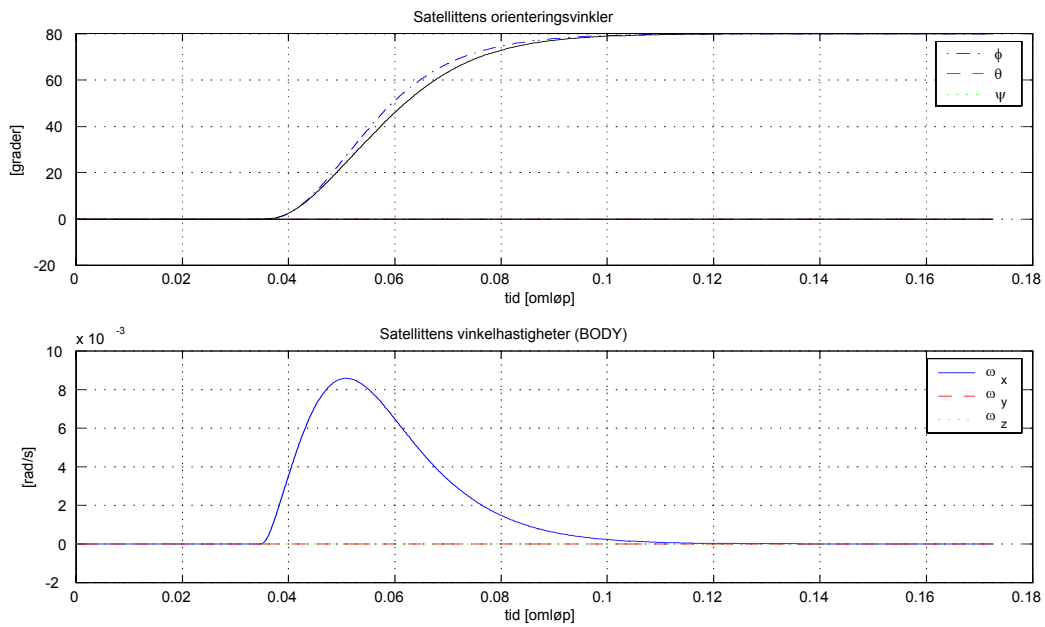
Figur 7.19: Systemrespons for ulineær regulator ved tap av to reaksjonshjul.



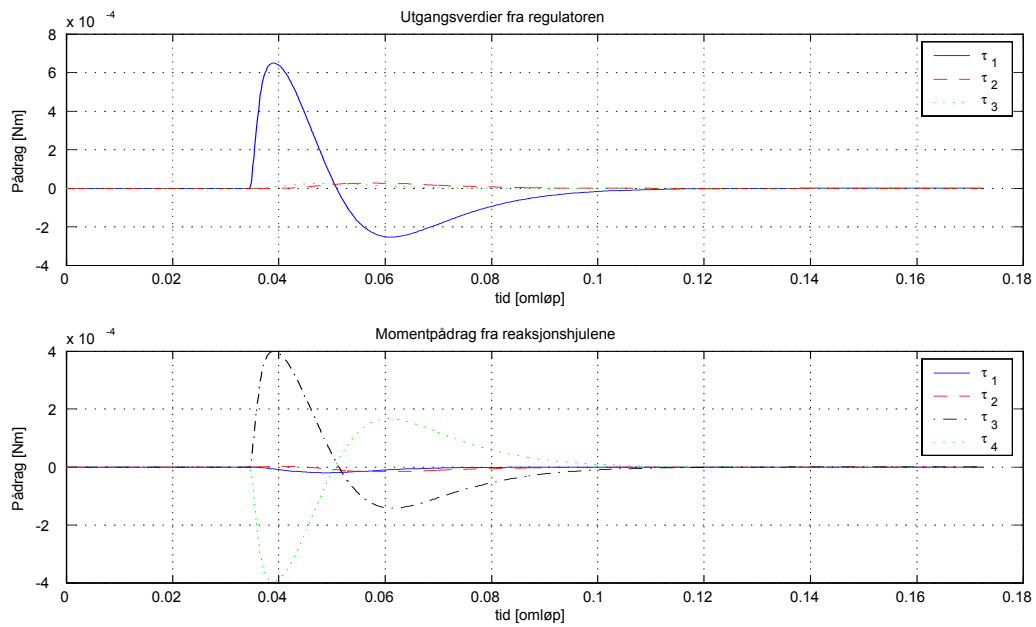
Figur 7.20: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved tap av to reaksjonshjul.



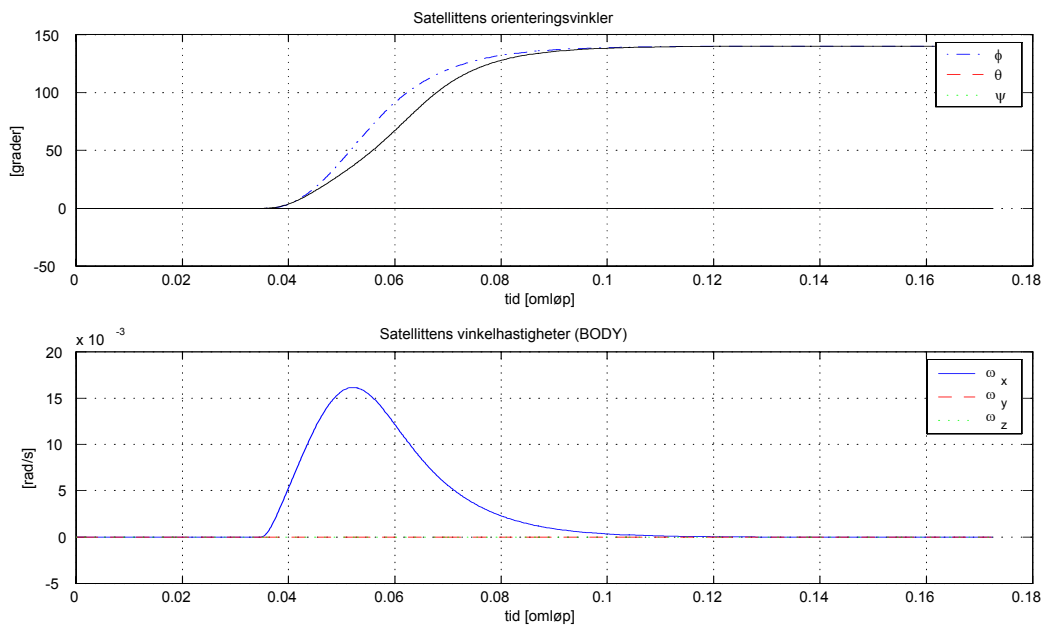
Figur 7.21: Systemrespons for ulineær regulator ved tap av to reaksjonhjul. Her vises hvordan ϕ aldri når referansen da den inntar periodiske svingninger.



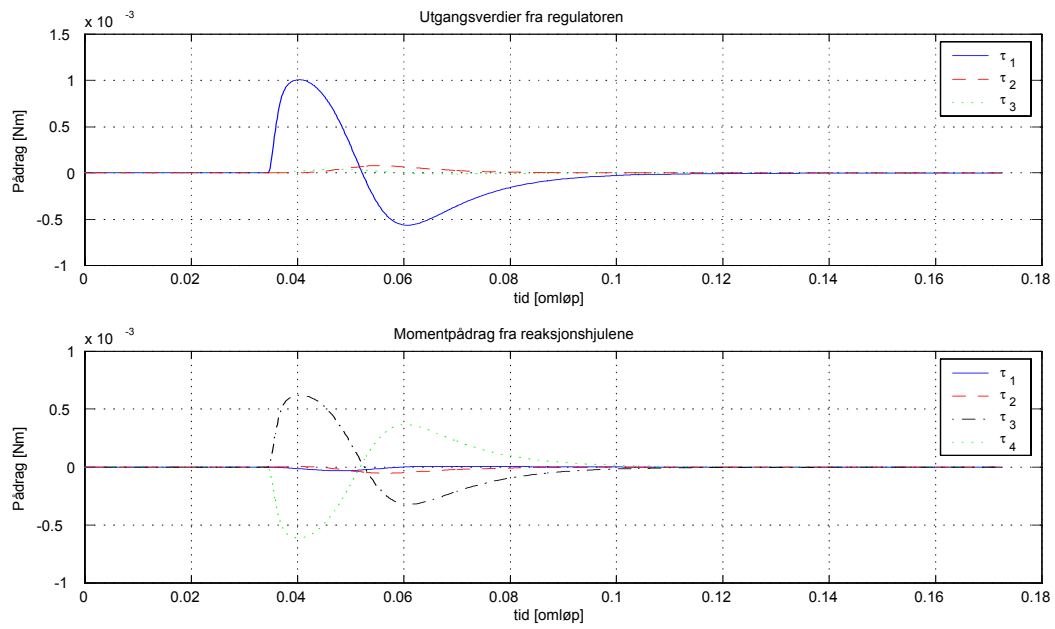
Figur 7.22: Systemrespons for ulineær regulator ved sprang i ϕ på 80° .



Figur 7.23: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 80° .



Figur 7.24: Systemrespons for ulineær regulator ved sprang i ϕ på 140° .



Figur 7.25: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 140° .

7.1.3 Simulering med sliding mode regulator

Når det gjelder sliding-mode regulatoren utviklet i kap 6.4 er det flere forskjellige parametre som kan endres, K -matrisa, U_i^{MAX} og tykkelsen på sliding boundary layer, Φ . Det er valgt to ulike verdier for Φ for å få frem hvilken betydning Φ har for regulatoren. Parametrene velges som følger:

$$\begin{aligned}U_i^{MAX} &= 0.02 \\ \mathbf{K} &= 0.2 * \mathbf{1} \quad , \text{ hvor } \mathbf{1} \text{ er identitetsmatrisa} \\ \Phi_1 &= 0.002, \quad \Phi_2 = 0.02\end{aligned}$$

Først simuleres sliding mode regulatoren med *sign*-funksjonen istedenfor *tanh*-funksjonen for å illustrere problemet med chattering. Til dette benyttes $U_i^{MAX} = 0.0002$. Reaksjonshjulene vil gi maks pådrag positivt eller negativt alt etter om målingene ligger under eller over referansen. Som vist i figur 7.26 vil satellitten følge referansen særdeles godt, men til prisen av et ekstremt pådragsbruk som ikke vil være mulig i praksis. I resterende simuleringer benyttes *tanh*-funksjonen for å unngå chattering og for å få jevn og fin regulering.

Figur 7.27 (øverst) viser systemet simulert uten støypåvirkning med $\Phi_1 = 0.002$. Reguleringen fungerer særdeles godt med sliding mode regulatoren. Figur 7.28 viser utgangen til sliding mode regulatoren og reaksjonshjulenes pådrag. En simulering med $\Phi_2 = 0.02$ uten støy ga tilnærmet samme resultat som ved $\Phi_1 = 0.002$. Resultatet er ikke vist her.

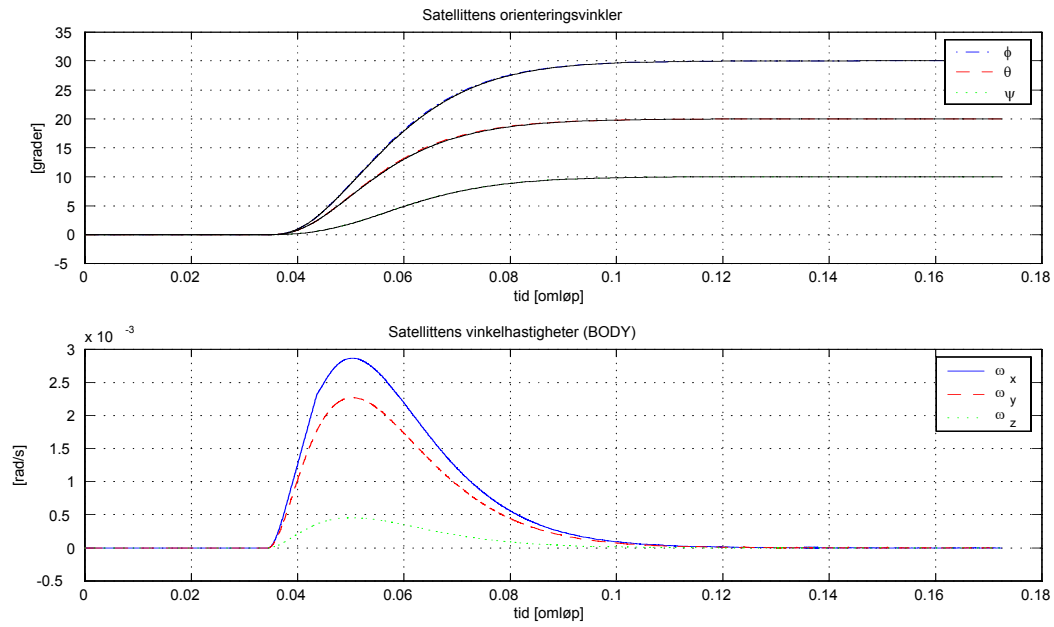
I figur 7.29 vises systemet med støypåvirkning tilsvarende 40% av generert moment og $\Phi_1 = 0.002$. Reguleringen fungerer svært godt. Sliding mode regulatoren er robust og tåler forstyrrelser meget godt. I figur 7.30 vises at regulatoraktiviteten blir større med forstyrrelser i systemet. Det er her raske vibrerende pådrag som vil slite ut reaksjonshjulene på sikt. Dette er et velkjent problem for sliding mode regulatorer, kalt chattering. Chattering kan unngås ved å velge en høyere verdi for Φ , men det blir da på bekostning av at systemet ikke vil takle sprang like bra. Ved å benytte et tykkere boundary layer, dvs en høyere verdi for Φ , vil regulatoraktiviteten kunne minskes betraktelig. Dette er vist i figur 7.31 hvor $\Phi_2 = 0.02$ er benyttet.

Figur 7.32 (øverst) viser systemet simulert ved tap av ytelse fra ett reaksjonshjul og $\Phi_2 = 0.02$. Sliding mode regulatoren takler tapet av ett reaksjonshjul meget bra. Figur 7.33 (nederst) viser pådraget gitt av de tre resterende reaksjonshjulene. Det kan observeres at utgangen fra sliding mode regulatoren gir noen karakteristiske bølger. Dette har ingen særlig betydning for reguleringen, men kan observeres i vinkelhastigheten i figur 7.32 (nederst). Disse bølgene unngås ved å sette $\Phi_1 = 0.002$ som vist i figur 7.34 og 7.35.

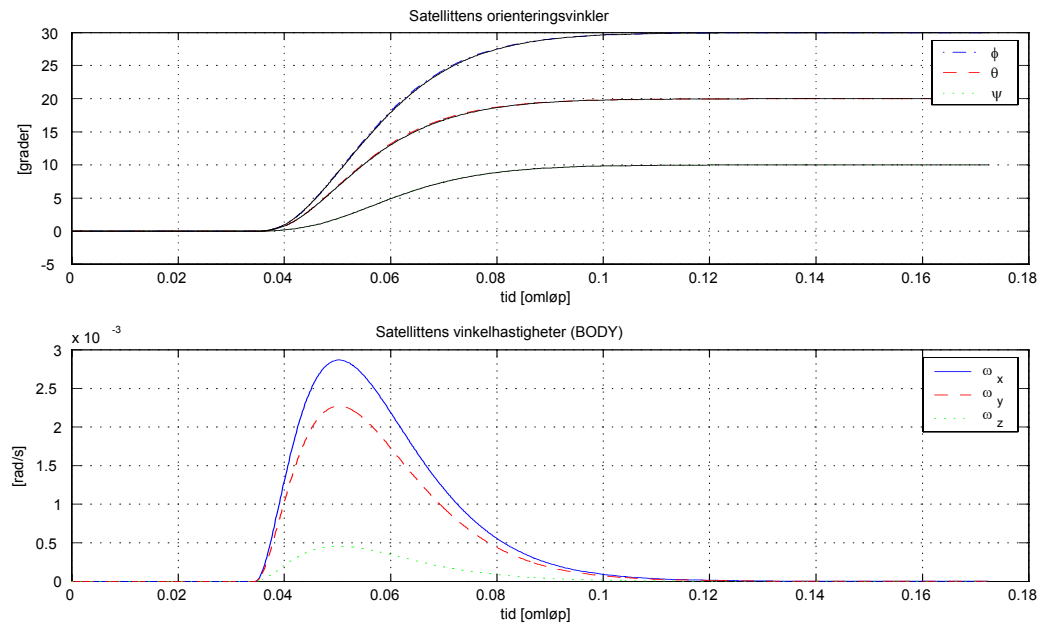
Figur 7.36 og 7.37 viser systemet simulert ved tap av to reaksjonshjul. Reaksjonen er ganske lik som for den lineære regulatoren, hvor vinklene θ og ψ stabiliserer seg med stasjonære avvik, mens ϕ nærmer seg referansen minimalt. Med kun to reaksjonshjul er det ikke mulig å regulere satellitten om alle akser.

I figur 7.38 utsettes systemet for et sprang i rullvinkelen på 80° for å teste regulatorens robusthet. Dette spranget takles særdeles bra. Regulatorens utgangsverdi er illustrert i figur 7.39 (øverst). Det oppnås her meget bra regulering selv ved $\Phi_2 = 0.02$.

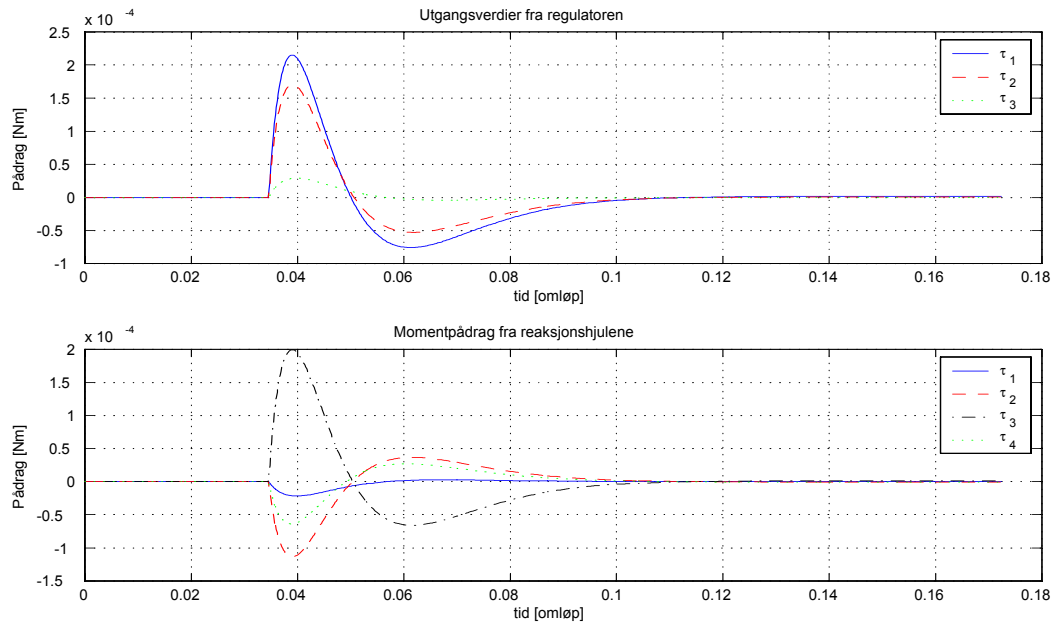
I figur 7.40 utsettes systemet for et sprang i rullvinkelen på 140° . Sliding mode regulatoren med $\Phi_2 = 0.02$ takler ikke dette spranget. Det oppstår store svingninger og systemet blir direkte ustabilt. Ved å velge et smalere boundary layer kan regulatoren allikevel takle spranget på 140° . I figur 7.41 og 7.42 utsettes systemet for samme spranget, men med $\Phi = 0.006$. Med denne verdien for Φ takler regulatoren spranget meget bra. Ved å benytte sliding mode regulator med $\Phi = 0.006$ vil svært bra regulering oppnås. Jo mindre verdi for Φ , jo mer nøyaktig regulering oppnås, men regulatoraktiviteten øker ved lavere verdi for Φ . Det gjelder å finne en mellomverdi for Φ som gir brukbar regulering samtidig som pådragsbruken ikke blir for kraftig.



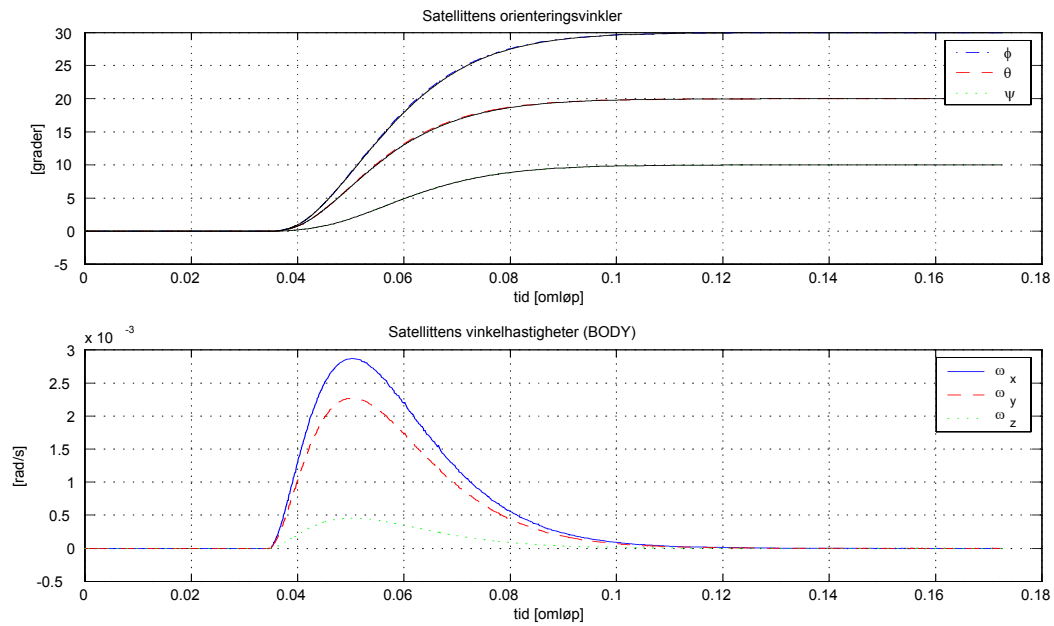
Figur 7.26: Systemrespons for sliding mode regulator uten støy, ved bruk av *sign*-funksjon istedenfor *tanh*-funksjon.



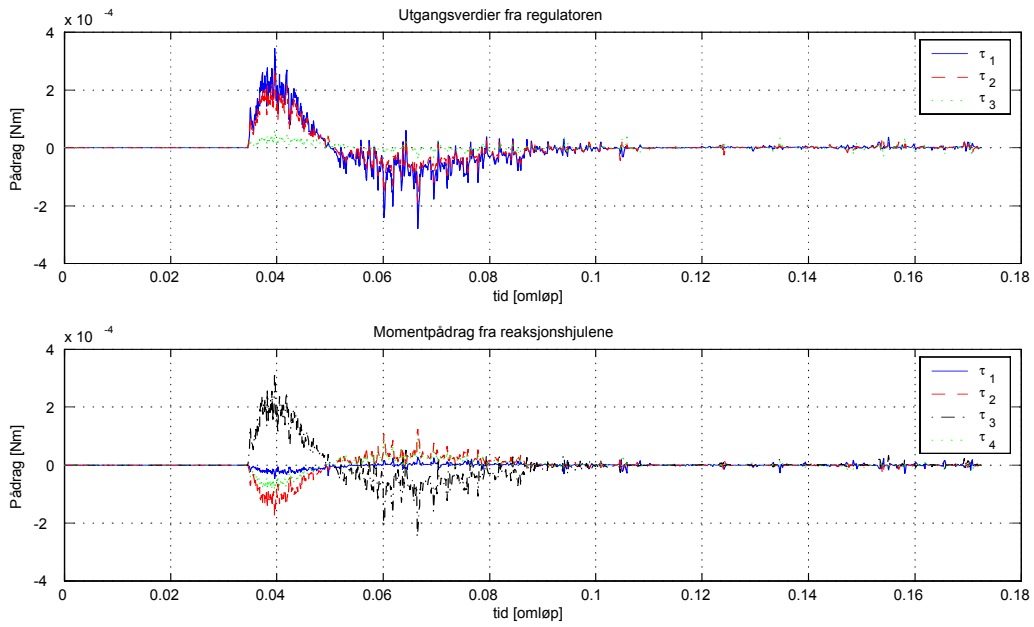
Figur 7.27: Systemrespons for sliding mode regulator uten støy. $\Phi_1 = 0.002$.



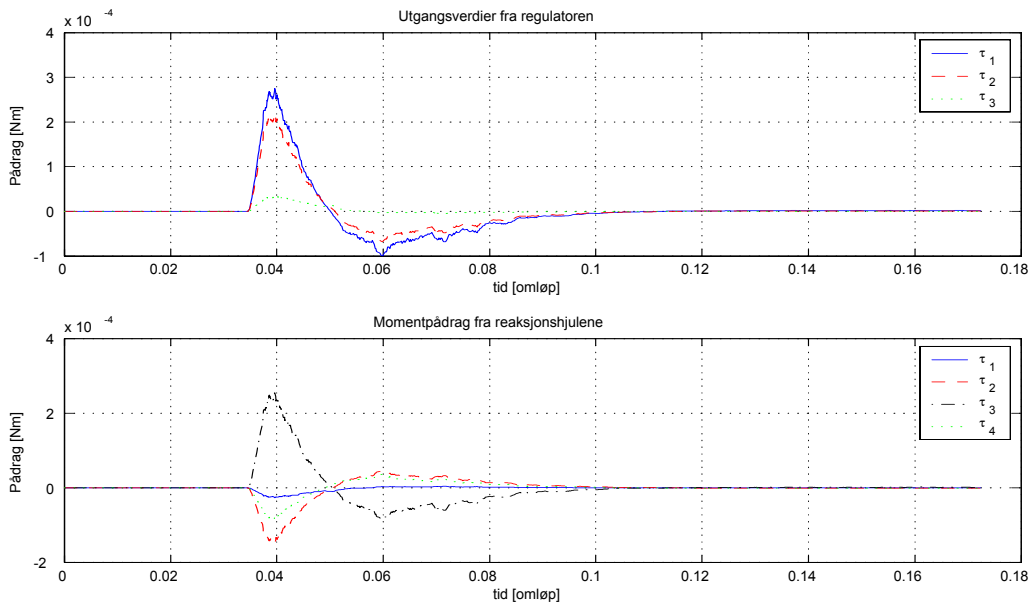
Figur 7.28: Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul uten støy. $\Phi_1 = 0.002$.



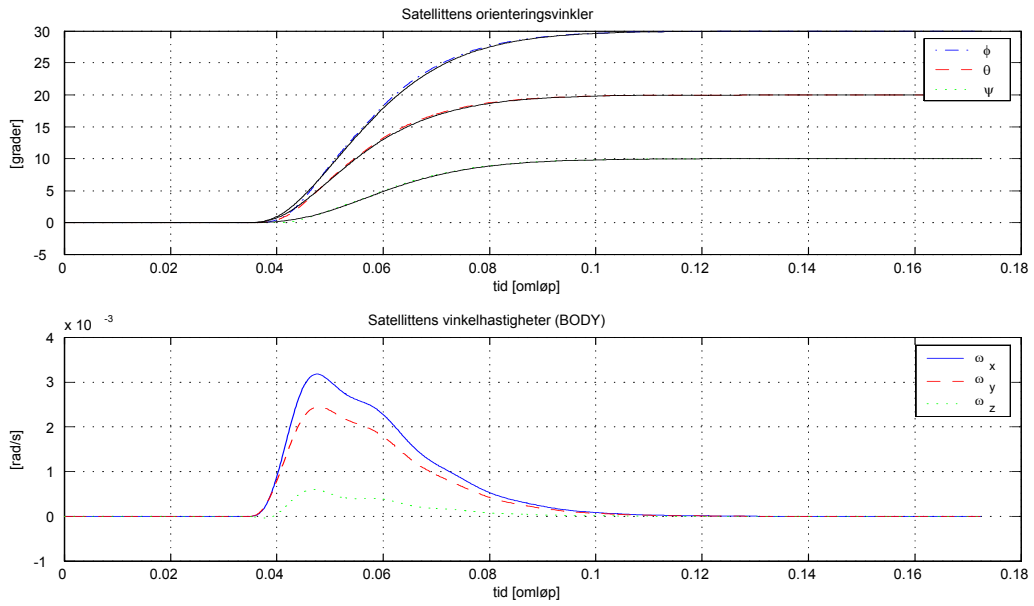
Figur 7.29: Systemrespons for sliding mode regulator med støy. $\Phi_1 = 0.002$.



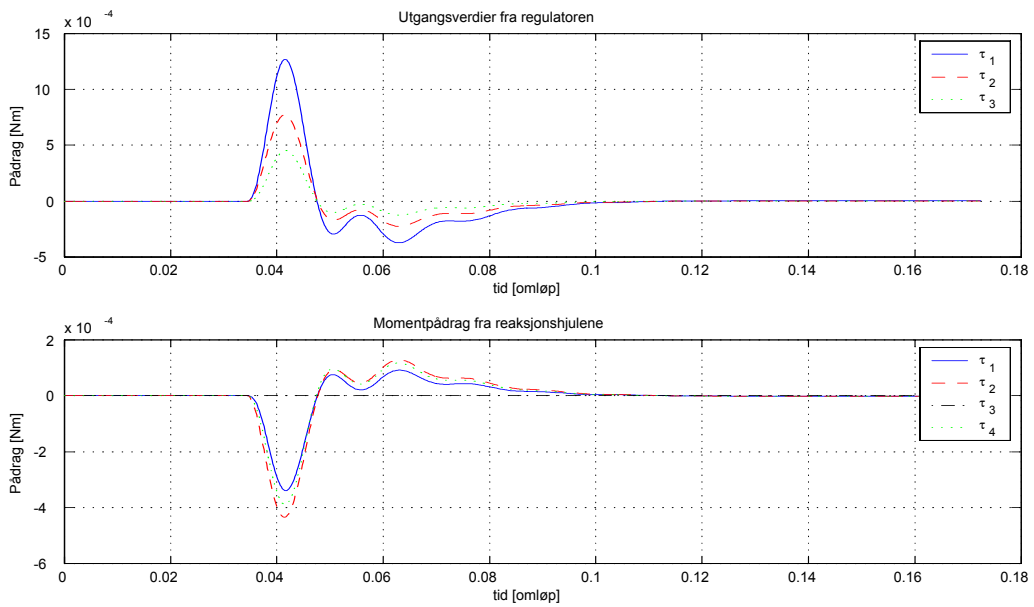
Figur 7.30: Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul med støy. $\Phi_1 = 0.002$.



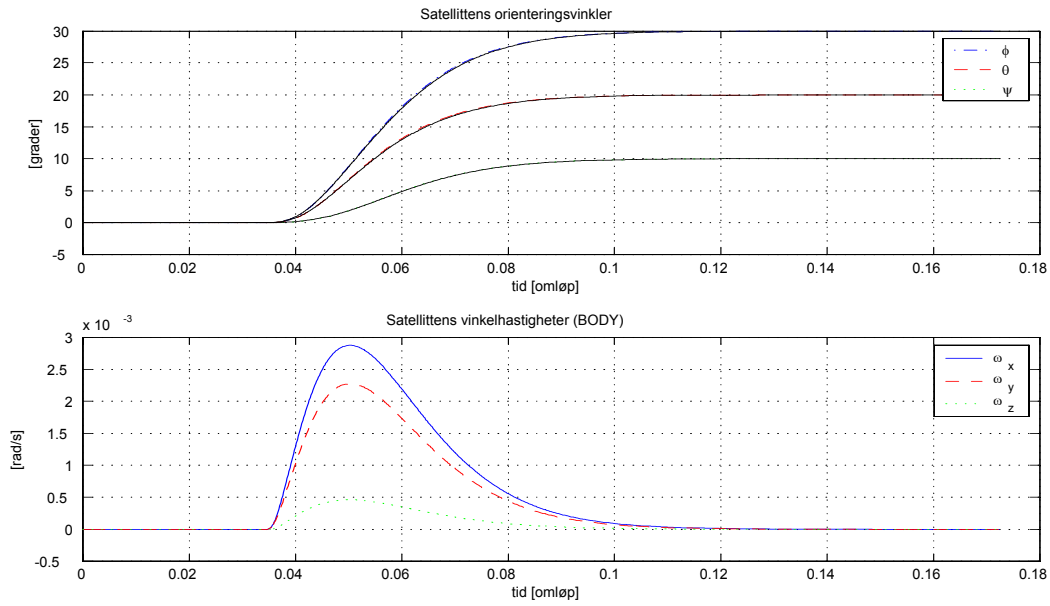
Figur 7.31: Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul med støy. $\Phi_2 = 0.02$.



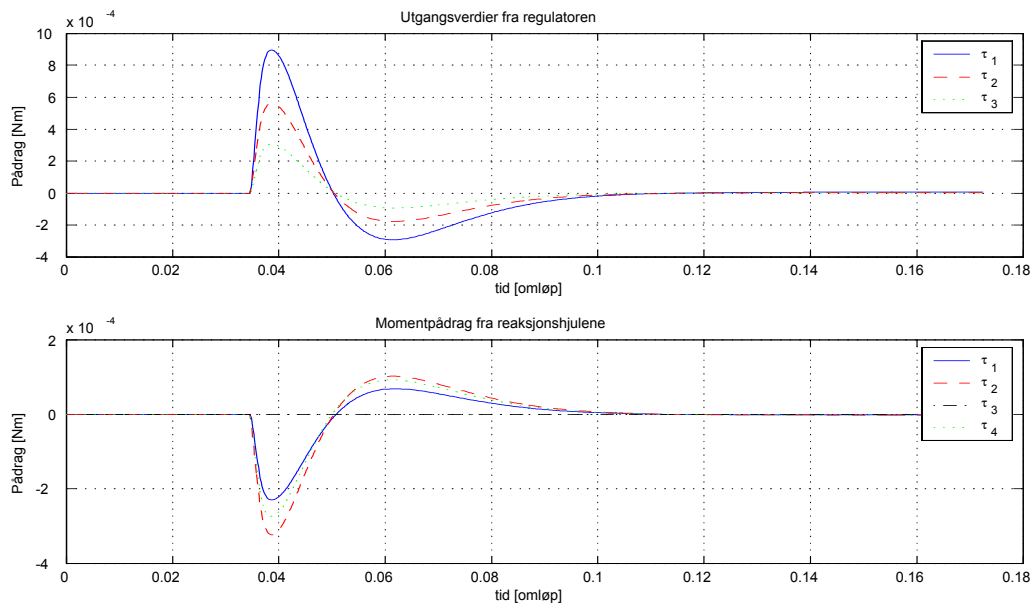
Figur 7.32: Systemrespons for sliding mode regulator ved bortfall av ett reaksjonshjul. $\Phi_2 = 0.02$.



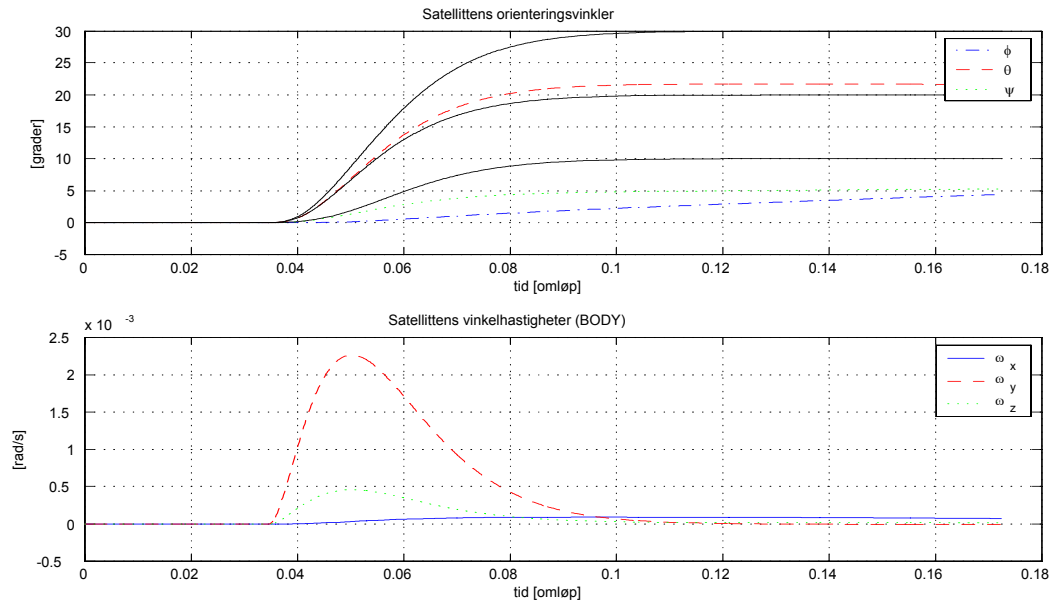
Figur 7.33: Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved bortfall av ett reaksjonshjul. $\Phi_2 = 0.02$



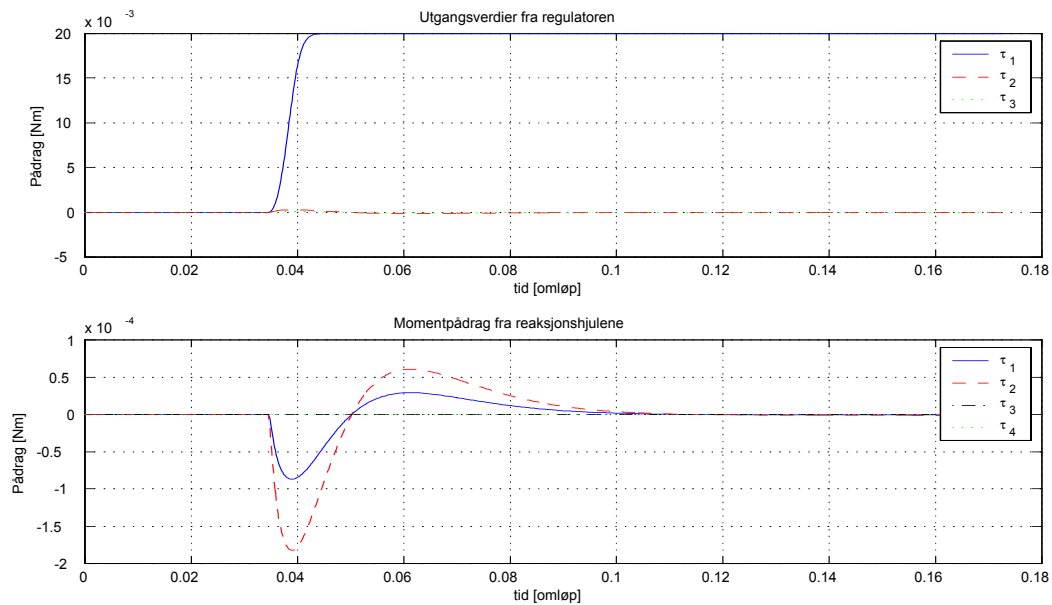
Figur 7.34: Systemrespons for sliding mode regulator ved bortfall av ett reaksjonshjul. $\Phi_1 = 0.002$.



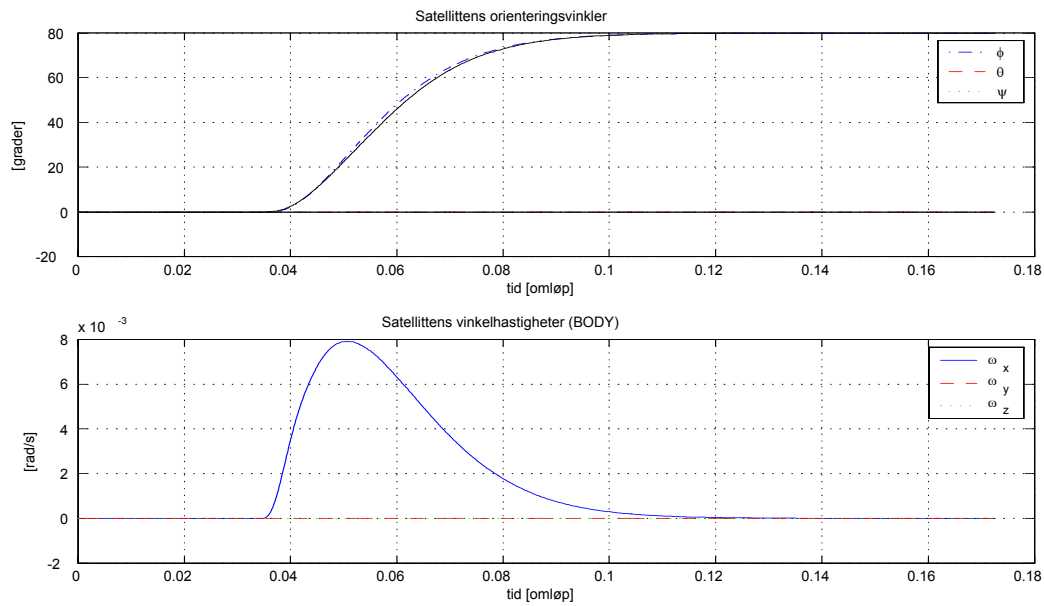
Figur 7.35: Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved bortfall av ett reaksjonshjul. $\Phi_1 = 0.002$



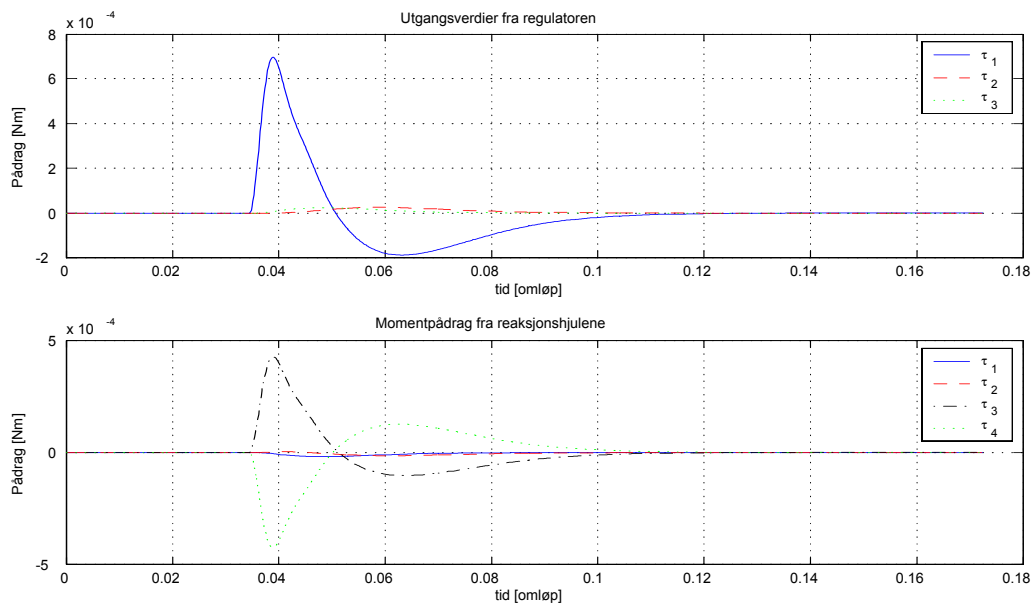
Figur 7.36: Systemrespons for sliding mode regulator ved bortfall av to reaksjonshjul. $\Phi_1 = 0.002$.



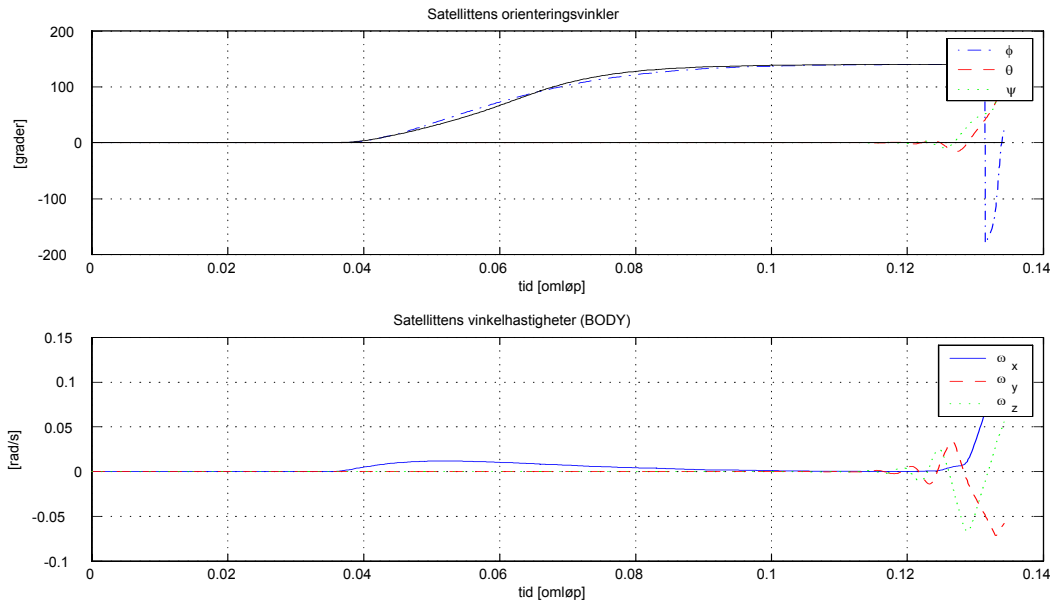
Figur 7.37: Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved bortfall av to reaksjonshjul. $\Phi_1 = 0.002$



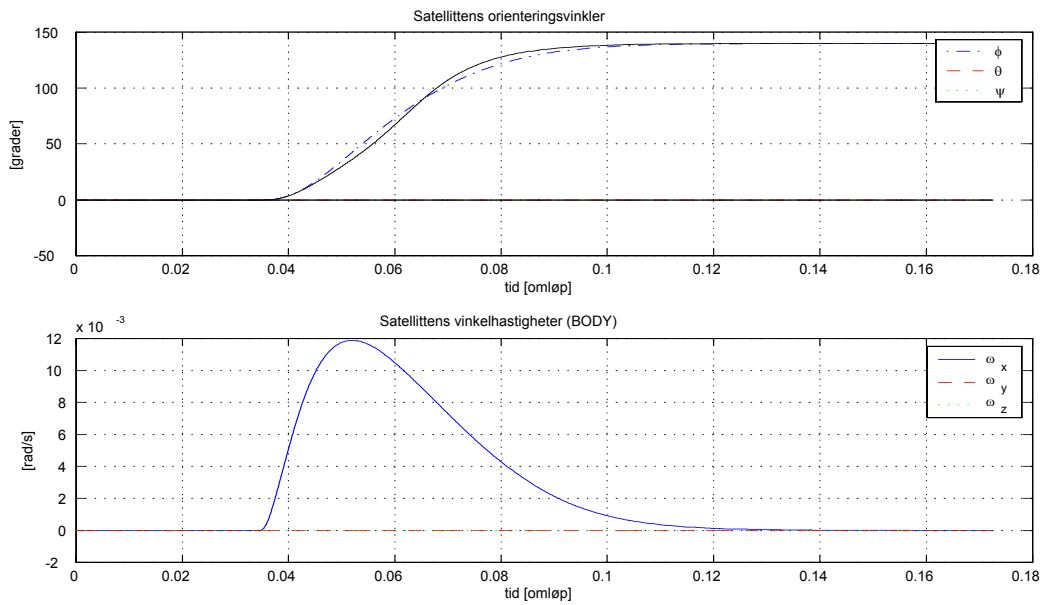
Figur 7.38: Systemrespons for sliding mode regulator ved sprang i ϕ på 80° . $\Phi_2 = 0.02$.



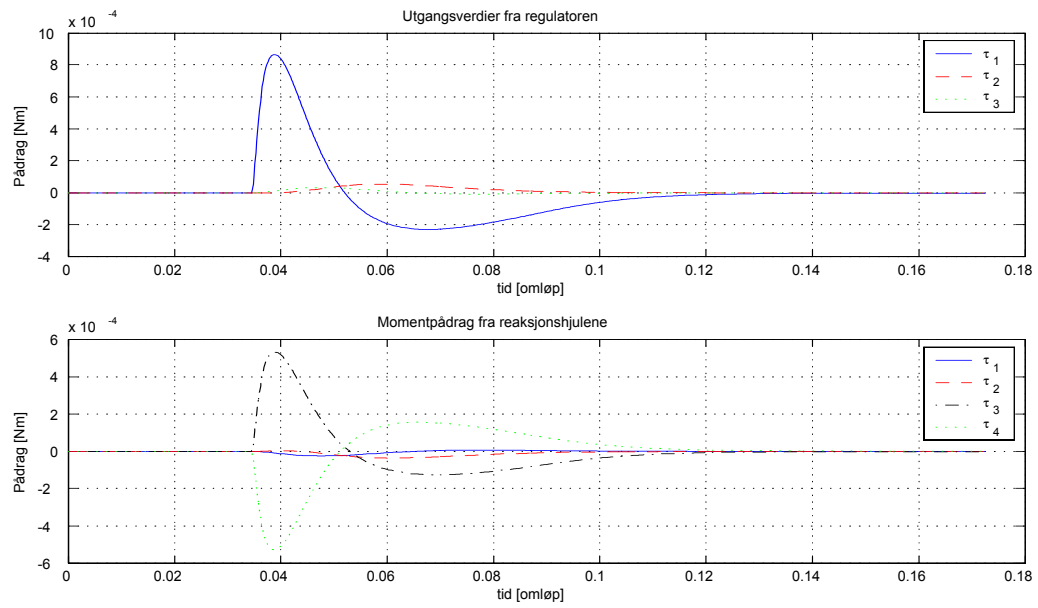
Figur 7.39: Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 80° . $\Phi_2 = 0.02$



Figur 7.40: Systemrespons for sliding mode regulator ved sprang i ϕ på 140° . $\Phi_2 = 0.02$.



Figur 7.41: Systemrespons for sliding mode regulator ved sprang i ϕ på 140° . $\Phi = 0.006$.



Figur 7.42: Utgangsverdier fra sliding mode regulator og pådrag fra reaksjonshjul ved sprang i ϕ på 140° . $\Phi = 0.006$.

7.2 Simuleringer med tetraeder utenfor satellittens tyngdepunkt

Modellen utviklet i kap 3.4.2 hvor tetraederet befinner seg utenfor satellittens tyngdepunkt skal her simuleres. Til dette benyttes den ulineære regulatoren beskrevet i kapittel 6.3. Reaksjonshjulenes maksimale dreiemoment er satt til $\tau_{\max} = 0.01 \text{ Nm}$. Som for simulering i satellittens tyngdepunkt benyttes også her et sprang i referansen på henholdsvis $\phi = 30^\circ$, $\theta = 20^\circ$ og $\psi = 10^\circ$. Både satellittens orientering i rommet og reaksjonshjulenes pådrag på satellitten vil bli plottet. For å illustrere hvordan endring av tetraederets plassering innvirker på reaksjonshjulenes pådrag, simuleres systemet først med tetraederet i tyngdepunktet, for deretter å endre tetraederets plassering utenfor tyngdepunktet. Simuleringene i tyngdepunktet er vist i kapittel 7.1.2.

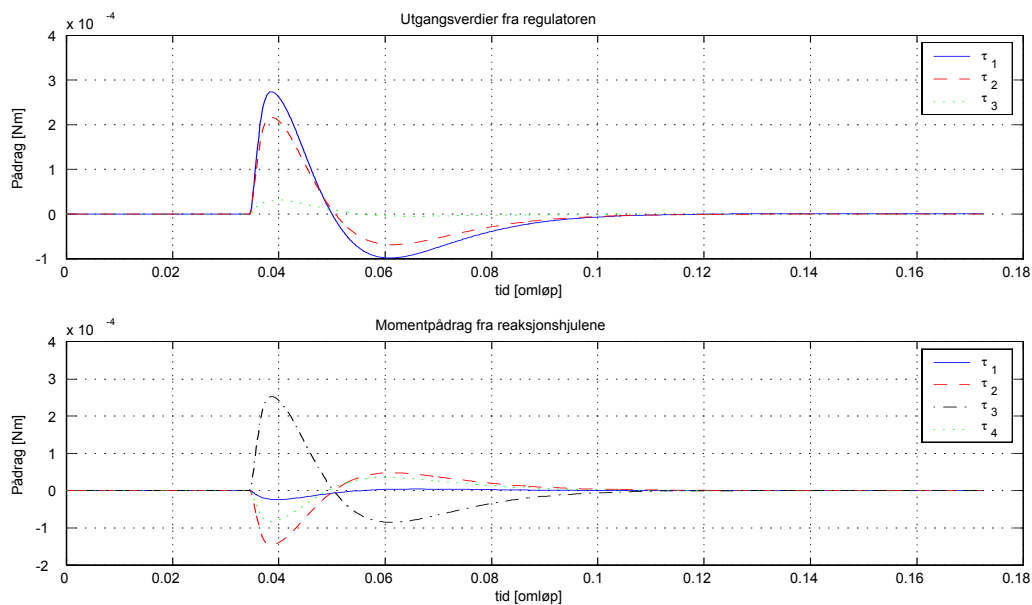
Figur 7.13 (øverst) viser systemresponsen, mens figur 7.14 (nederst) viser reaksjonshjulenes pådrag med tetraeder plassert i satellittens tyngdepunkt. Reguleringen fungerer som forventet svært bra, og reaksjonshjulene har et maksimalt pådrag for hjul 3 på $2.36 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$.

Figur 7.43 (nederst) viser reaksjonshjulenes pådrag når tetraederet befinner seg 10 cm fra origo langs z-aksen. En plassering utenfor tyngdepunktet fører til at reaksjonshjulene må gi større pådrag for å endre satellittens orienteringsvinkler. Maksimalt pådrag for hjul 3 er nå på $2.52 \cdot 10^{-4} \text{ Nm}$. Det kan altså observeres en liten stigning i pådraget. Ved å sette tetraederet 50 cm fra origo langs z-aksen oppnås et maksimalt pådrag for hjul 3 på $1.25 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}$, 5 ganger større enn ved tetraederet i tyngdepunktet, se figur 7.45 (nederst). Med tetraederet så langt fra tyngdepunktet fås et noe tregere system. Orienteringsvinklene blir hengende litt etter referansetrajektoren i starten av stigningen, men det er minimalt og har ingen betydning for reguleringen, se figur 7.44 (øverst).

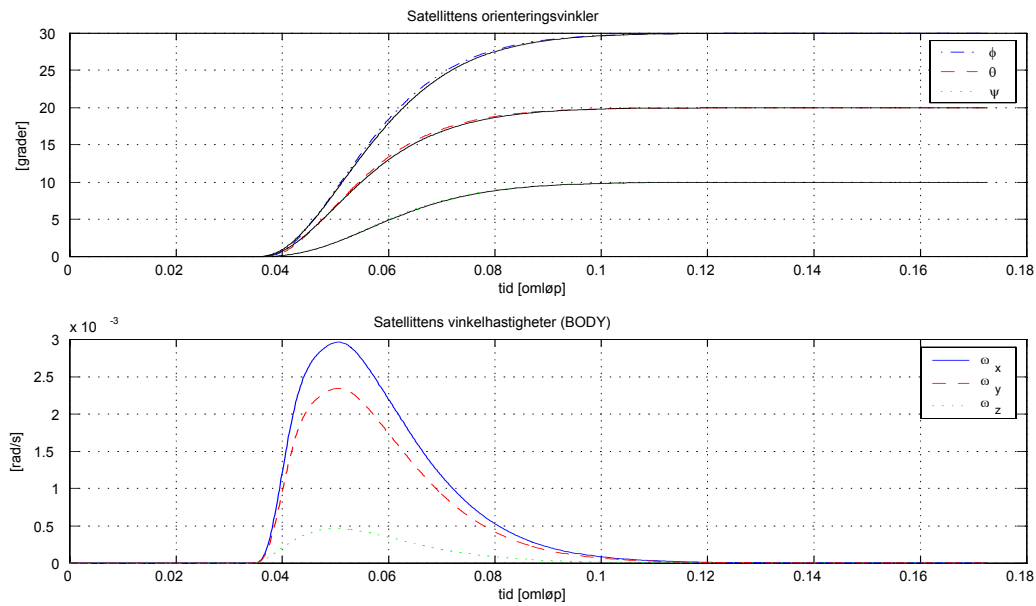
Figur 7.46 (nederst) viser reaksjonshjulenes pådrag når tetraederet befinner seg 10 cm fra origo langs alle tre akser, i punktet $[0.1 \ 0.1 \ 0.1]$. Det oppnås en noe annerledes pådragskarakteristikk her enn ved endring av plassering kun langs en akse. Dette skyldes kryssleddene som oppstår i treghetsmatrisen $\mathbf{I}_O$. Figur 7.48 (nederst) viser hvordan reaksjonshjulene reagerer med tetraeder i punktet $[0.5 \ 0.5 \ 0.5]$. De store svingningene som oppstår skyldes kryssleddene i treghetsmatrisen $\mathbf{I}_O$. Systemresponsen illustrert i figur 7.47 (øverst) viser hvordan ψ -vinkelen blir liggende litt over referansetrajektoren i starten av stigningen. Dette skyldes også kryssleddene i treghetsmatrisen $\mathbf{I}_O$. En plassering av tetraederet så langt unna tyngdepunktet er ikke realistisk for NSAT-1, siden denne plasseringen ligger utenfor satellitten. Ut i fra dette kan det konkluderes med at uansett hvor tetraederet plasseres inne i satellitten, vil reguleringen fungere meget bra. Dette forutsetter at reaksjonshjulene er så kraftige at de klarer å gi det ønskede pådrag. Med $\tau_{\max} = 0.01 \text{ Nm}$ er dette ikke noe problem her. Men hvis det i tillegg

ønskes en raskere endring av orientering, kan det ved tetraeder plassert utenfor tyngdepunktet bli nødvendig med kraftigere reaksjonshjul.

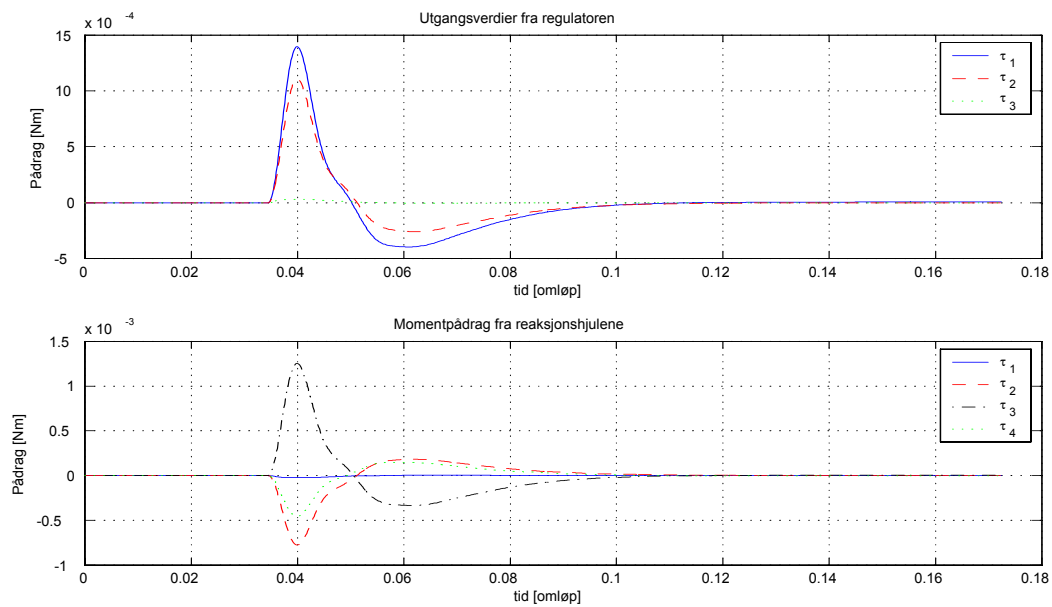
Den ulineære regulatoren regulerer systemet meget bra selv om tetraederet befinner seg utenfor tyngdepunktet. Ulempen er at reaksjonshjulene må gi et mye større pådrag med tetraederet plassert utenfor tyngdepunktet. Dette gjør at reguleringen av satellitten blir mye mer energikrevende, og det stiller krav til kraftigere reaksjonshjul enn det som trengs i tyngdepunktet. Det er ingen problemer med å benytte samme regulator som ved regulering i tyngdepunktet.



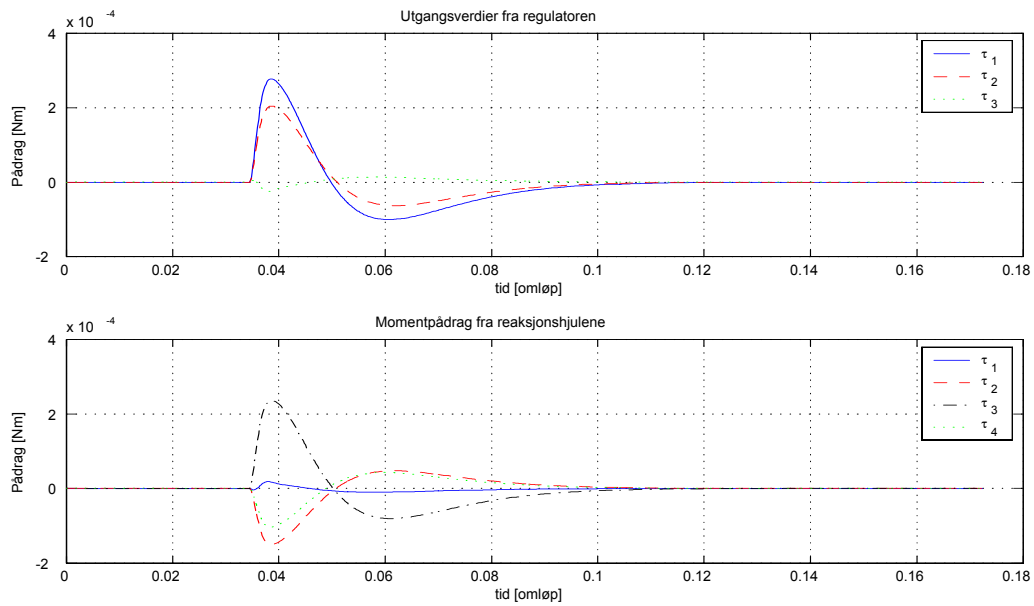
Figur 7.43: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med tetraeder i punkt $[0 \ 0 \ 0.1]$.



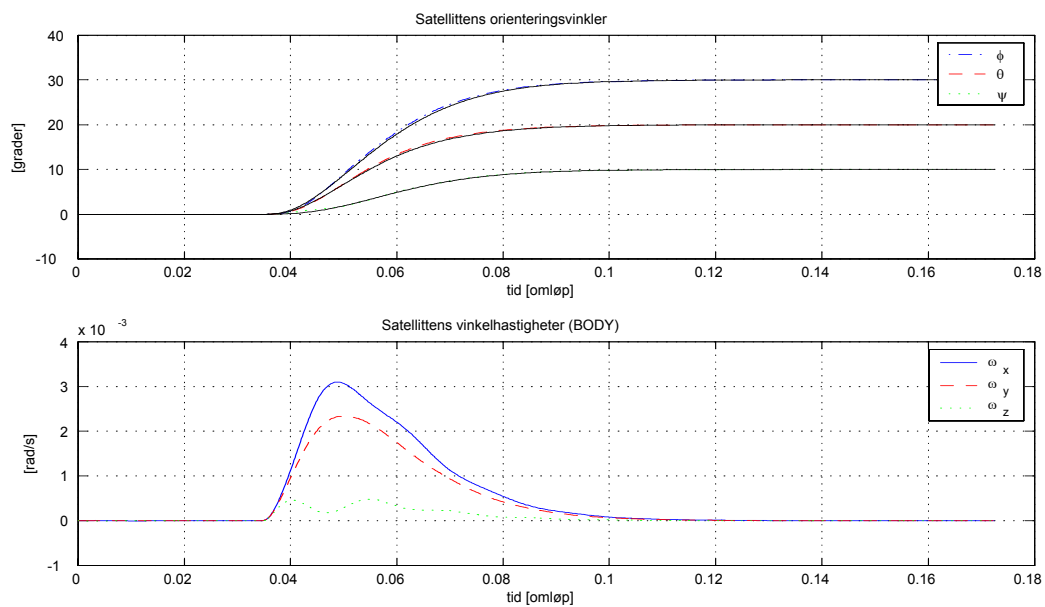
Figur 7.44: Systemrespons med tetraeder i punktet $[0 \ 0 \ 0.5]$.



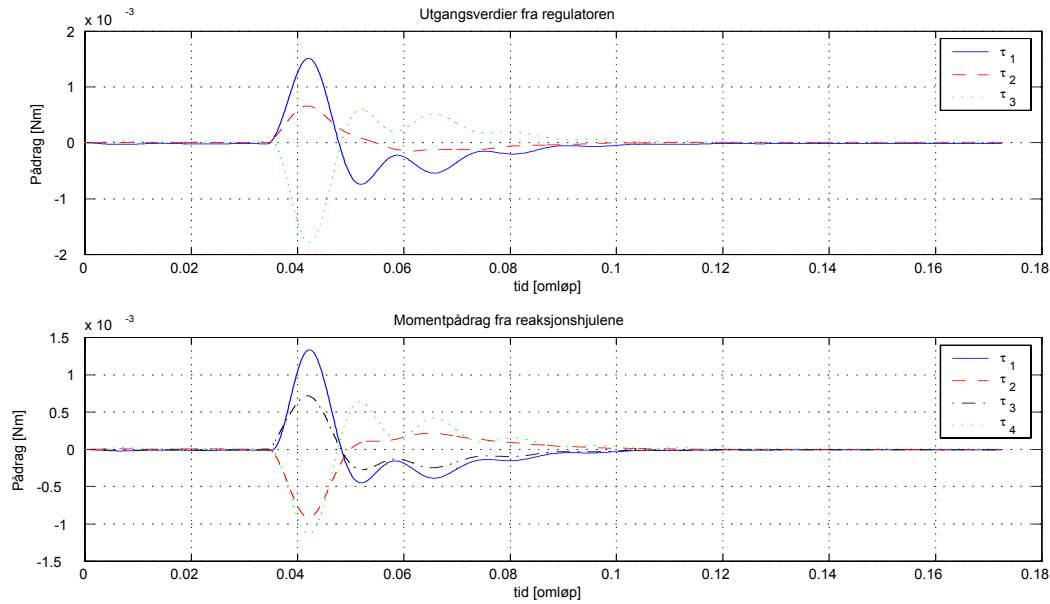
Figur 7.45: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med tetraeder i punktet $[0 \ 0 \ 0.5]$.



Figur 7.46: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med tetraeder i punktet $[0.1 \ 0.1 \ 0.1]$.



Figur 7.47: Systemrespons med tetraeder i punktet $[0.5 \ 0.5 \ 0.5]$.



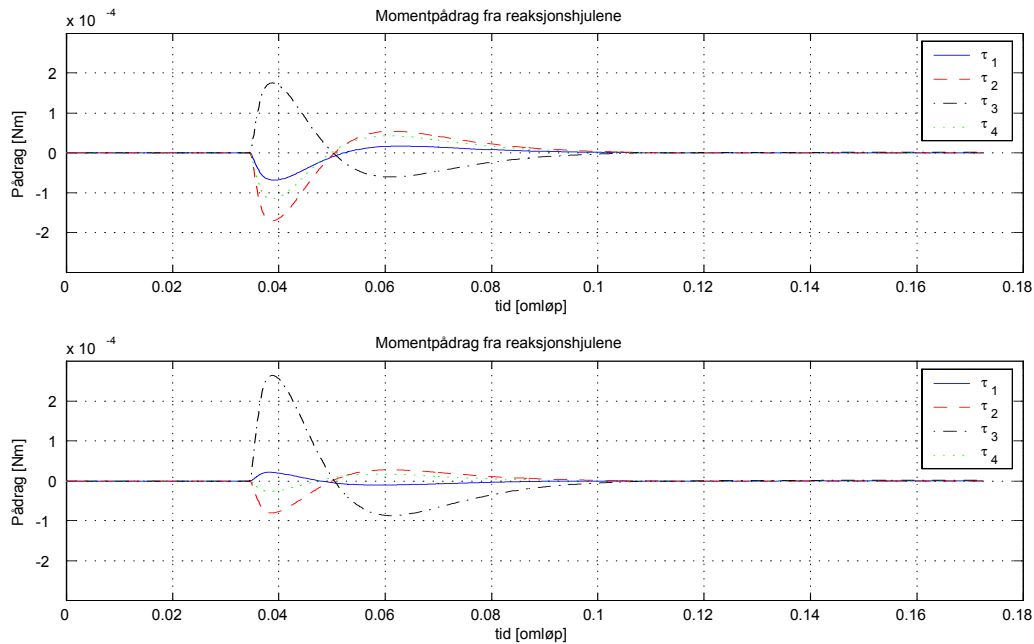
Figur 7.48: Utgangsverdier fra ulineær regulator og pådrag fra reaksjonshjul med tetraeder i punktet $[0.5 \ 0.5 \ 0.5]$.

7.3 Simuleringer med endret vektmatrise

Som beskrevet i kapittel 4.3.3 kan det være ønskelig å vekte de ulike reaksjonshjulene forskjellig. Dette gjøres ved å endre vektmatrisen $\mathbf{W}$. Elementene i matrisen avgjør hvor kostbart det er å benytte pådraget; et lavt tall angir lav kostnad. Som eksempel her er det brukt to forskjellige vektmatriser:

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Det er her utført simuleringer med sprang i vinklene på $\phi = 30^\circ$, $\theta = 20^\circ$ og $\psi = 10^\circ$. I figur 7.49 er det vist hvordan pådragene blir allokert til de forskjellige reaksjonshjulene ved vektmatrisen $\mathbf{W}_1$ (øverst) og $\mathbf{W}_2$ (nederst). Det er tydelig at reaksjonshjul 1 og 2 blir mer brukt i figur 7.49 (øverst) enn de blir i figur 7.49 (nederst), samtidig som reaksjonshjul 3 gir størst pådrag i figur 7.49 (nederst). Dette kan effektivt benyttes hvis satellitten har reaksjonshjul med ulik ytelse, ved at de kraftigste reaksjonshjulene vektes mest mens de svakeste vektes minst.



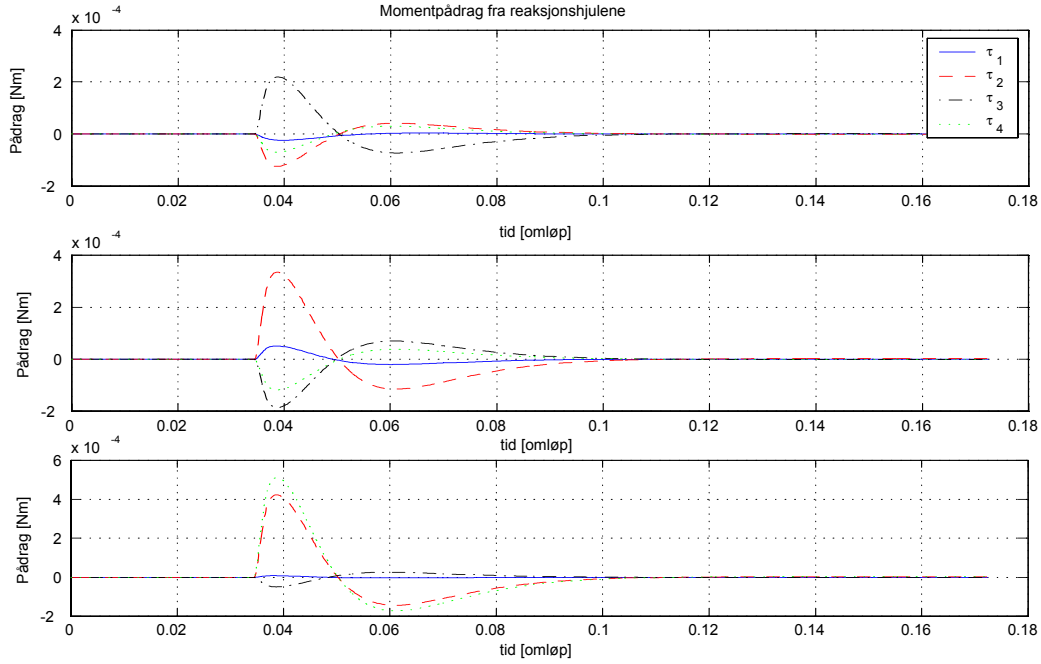
Figur 7.49: Momentpådrag fra reaksjonshjulene ved vektmatrisene $\mathbf{W}_1$ (øverst) og $\mathbf{W}_2$ (nederst).

7.4 Simuleringer med uperfekt tetraeder

Som beskrevet i kapittel 4.3.4 kan plasseringen av reaksjonshjulene avvike noe fra tetraederkonfigurasjonen. De tre ulike konfigurasjonene nevnt i kapittel 4.3.4 er her simulert ved hjelp av den ulineære regulatoren ved sprang i vinklene på henholdsvis $\phi = 30^\circ$, $\theta = 20^\circ$ og $\psi = 10^\circ$. Satellitten følger referansen like godt for alle tre konfigurasjonene. Forskjellen ligger i pådragsbruket til de ulike reaksjonshjulene. Som vist i figur 7.50 (øverst) gir den perfekte tetraederkonfigurasjonen det laveste pådragsforbruket. Reaksjonshjul 3 har det største pådraget på $2.2 \cdot 10^{-4} Nm$. Figur 7.50 (midten) viser pådraget fra reaksjonshjulene ved bruk av allokeringsmatrisen $\mathbf{T}_1$. Pådragsforbruket er noe større for denne konfigurasjonen, reaksjonshjul 2 har det største pådraget på $3.35 \cdot 10^{-4} Nm$. For allokeringsmatrisen $\mathbf{T}_2$, som avviker mest fra det perfekte tetraederet, er pådragsforbruket høyest. Dette er vist i figur 7.50 (nederst) hvor reaksjonshjul 4 har det største pådraget på $5.1 \cdot 10^{-4} Nm$.

Ut i fra disse eksemplene kan det slås fast at reaksjonshjul i perfekt tetraederkonfigurasjon gir det minste totale pådragsforbruket. Dette stemmer bra med teorien om at mest mulig spredning mellom kolonnevektorene i allokeringsmatrisen gir det minste pådragsforbruket. Simuleringene viser tydelig at jo mer konfigurasjonen avviker fra det perfekte tetraeder, jo mer pådrag må til for å endre satellittens

orientering. For å minimalisere pådragsforbruket, er det ønskelig å ha reaksjonshjulene i en konfigurasjon nærmest mulig det perfekte tetraeder.



Figur 7.50: Momentpådrag fra reaksjonshjulene for de ulike konfigurasjonene. Øverst: Perfekt tetraeder. Midten: T_1 . Nederst: T_2 .

7.5 Satellittens hurtighet

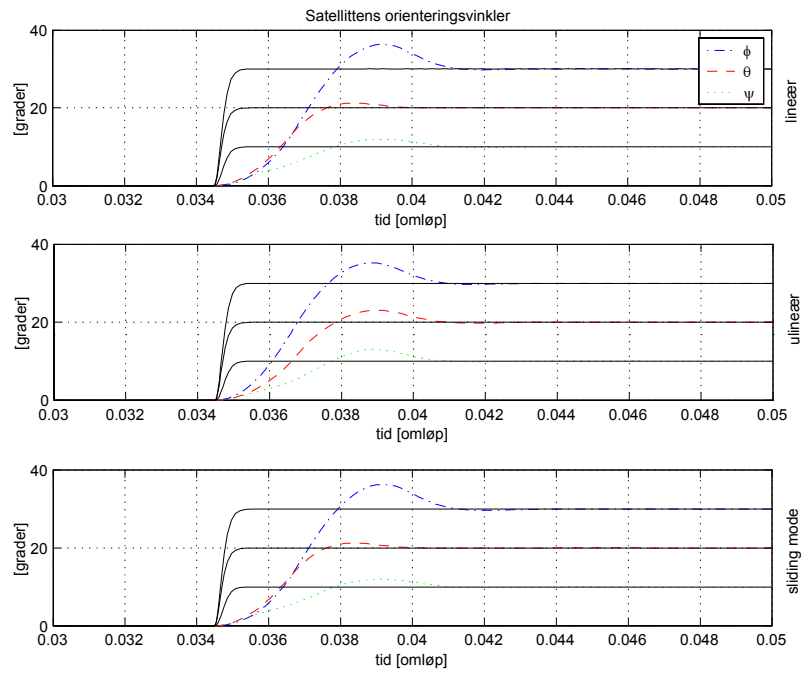
Det kan være interessant å se hvor fort satellitten kan dreie fra en orientering til en annen med de ulike regulatortypene. De samme regulatorparametrene som benyttet i kapittel 7.1 er benyttet her. For sliding mode regulatoren benyttes boundary layer $\Phi = 0.006$. For å få en meget bratt referanse benyttes verdien $\omega_n = 2$ i referansemodellen. Med reaksjonshjul med maksimalt pådrag på $0.01 Nm$ blir regulatorenes respons som vist i figur 7.51. Det er lite som skiller de tre regulatorene når det gjelder hurtig respons. De er omtrent like raske. Alle tre regulatorene har forholdsvis store oversving.

For tetraeder utenfor tyngdepunktet ville responsen blitt tregere, siden det utenfor tyngdepunktet kreves større pådrag for å endre orienteringen. Dette er tydelig vist i kapittel 7.2.

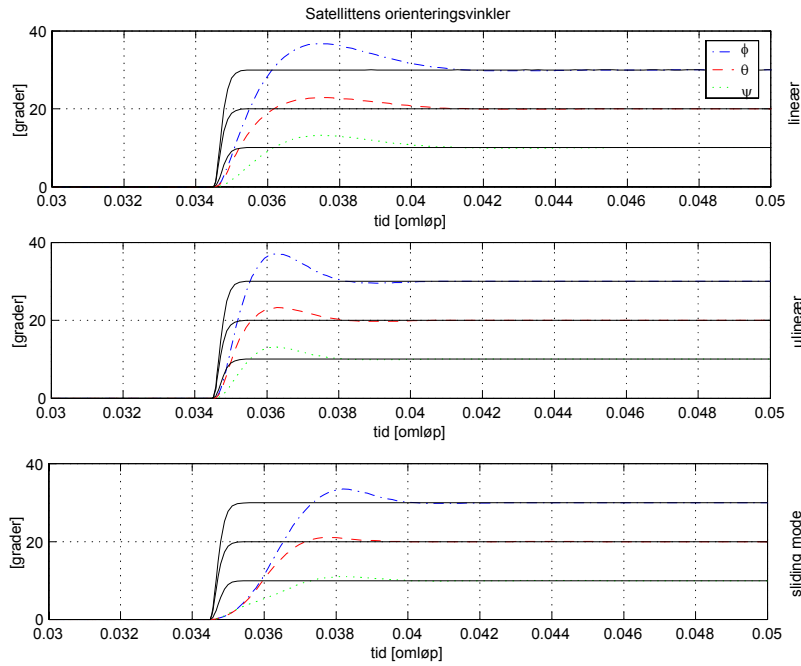
Ved å endre reaksjonshjulenes maksimale pådrag til $1Nm$ blir regulatorenens respons som vist i figur 7.52. Her er den ulineære regulatoren den klart hurtigste, mens den lineære regulatoren er nest hurtigst. Sliding mode regulatoren får en mye tregere respons. Dette kommer av at det i sliding mode regulatoren er satt en verdi for maksimalt pådrag på $U_i^{MAX} = 0.02$. For at sliding mode regulatoren skal oppnå like rask respons som de andre regulatoren må denne verdien økes betraktelig.

Ved å øke denne til $U_i^{MAX} = 1$ og benytte boundary layer $\Phi = 0.05$ oppnås ekstremt hurtig og nøyaktig regulering med minimalt oversving. Dette er vist i figur 7.53. Reaksjonshjulenes maksimale pådrag ved denne reguleringen blir ved simulering lest av til $0.85Nm$. Dette viser igjen at ved sliding mode regulering kan tilnærmet perfekt regulering oppnås, men til prisen av ekstreme pådrag. Ved å legge til støy på pådraget for denne regulatoren blir regulatoraktiviteten ekstrem, og reaksjonshjulene vil bli utslitt på kort tid. Den lineære og den ulineære regulatoren kan også tunes for å oppnå raskere respons, ved å endre henholdsvis K-matrissa i den lineære og konstantene K_p og K_d i den ulineære regulatoren.

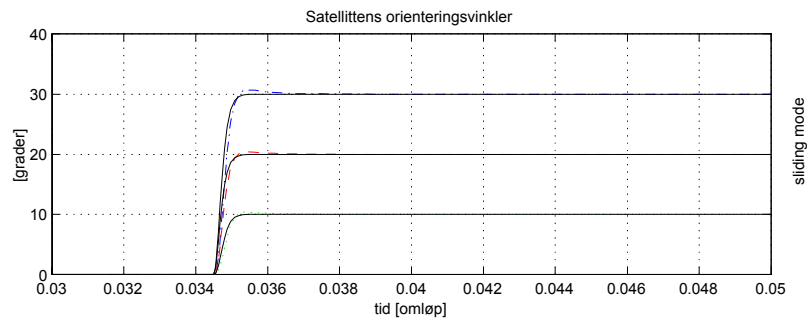
Hvis det er ønskelig å foreta svært raske endringer i orientering i visse tilfeller kan det være en idé å benytte to regulatorer. En regulator er aktiv mens satellitten er i ro eller ved langsomme bevegelser, mens en annen regulator kobles inn hvis en svært hurtig endring i orientering ønskes. Det må da utvikles en metode for å skifte mellom disse to regulatoren. En annen måte å oppnå svært raske endringer i orientering på er å bytte ut reaksjonshjulene med gyroer. Gyroer er beskrevet i kapittel 5.2.



Figur 7.51: De tre regulatorenes respons ved maksimalt pådrag satt lik $0.01Nm$.



Figur 7.52: De tre regulatorenes respons ved maksimalt pådrag satt lik $1Nm$.



Figur 7.53: Sliding mode regulatorens respons ved maksimalt pådrag satt lik $1Nm$ og sliding-mode parametrene satt som $U_i^{MAX} = 1$ og $\Phi = 0.05$.

Kapittel 8

Konklusjon

I simuleringskapitlet kommer det tydelig fram at plassering av reaksjonshjul i tetraederkonfigurasjon gir en meget effektiv og robust regulering. Ved tap av ytelse fra ett reaksjonshjul fungerer reguleringen fortsatt like bra. Dette er en stor fordel som gjør systemet meget robust. Pådragsallokeringen for det overaktuerte satellittsystemet fungerer meget godt, pådraget blir fordelt til de ulike reaksjonshjulene ved hjelp av optimalisering. Ved reaksjonshjul med ulik ytelse kan en vektmatrise benyttes for å gi de kraftigste reaksjonshjulene det største pådraget.

Den lineære regulatoren fungerer meget godt i nærheten av arbeidspunktet, men ved økende avstand fra dette vil systemet bli ustabilt og den lineære regulatoren kan ikke benyttes. Dette er som forventet for en lineær regulator.

Sliding mode regulatoren fungerer svært godt. Den takler sprang i referansen bedre enn den lineære regulatoren. Sliding mode regulatoren kan gi ekstremt nøyaktig regulering, men det fører til hard pådragsbruk og rask slitasje av reaksjonshjulene. Regulatoren bør tunes slik at tilfredsstillende regulering oppnås samtidig som pådragsbruken blir moderat.

Den ulineære regulatoren fungerer best av de tre regulatorenene. Den er stabil ved alle simuleringer. Stabiliteten til den ulineære regulatoren er forsøkt bevist, men det er ikke kommet fram til et fullstendig stabilitetsbevis.

Ved plassering av tetraederet utenfor tyngdepunktet viser det seg at reaksjonshjulene må gi et større pådrag for å endre satellittens orienteringsvinkler. I tillegg vil rotasjon om de forskjellige aksene innvirke på hverandre. Modellen som blir brukt er forenklet, men den viser allikevel forventede resultater. Simuleringene viser at systemet kan reguleres meget godt uavhengig av hvor tetraederet er plassert på satellitten. Økt avstand fra tyngdepunktet gir økt pådrag fra reaksjonshjulene, som igjen fører til økt energiforbruk. For å ikke bruke unødvendig mye energi, bør tetraederet plasseres så nærme tyngdepunktet som mulig.

Selv om konfigurasjonen avviker fra det perfekte tetraeder kan satellitten reguleres meget bra. Forskjellen ligger i pådragsbruket Jo mer konfigurasjonen avviker fra det perfekte tetraeder, jo mer pådrag må til for å endre satellittens orientering. Dette skyldes at spredningen av reaksjonshjulene er størst i tetraederkonfigurasjonen, og avvik fra denne gir dårligere spredning som fører til at reaksjonshjulene motarbeider hverandre mer.

Ved å benytte gyroer som aktuatorer kan satellitten foreta mye hurtigere orienteringsendringer enn med reaksjonshjul, men med gyroer innføres singularitetsproblemer og stor mekanisk kompleksitet. Orienteringsregulering med gyroer bør undersøkes i videre arbeid med satellitten.

Kapittel 9

Videre arbeid

For den lineære regulatoren kan det være interessant å benytte linearisering om flere arbeidspunkter, og finne en metode for å skifte mellom disse arbeidspunktene etter hvert som satellittens orientering endrer seg. På denne måten bør stabilitet kunne oppnås for alle mulige orienteringer av satellitten.

For den ulineære regulatoren er det ønskelig å få utviklet et skikkelig stabilitetsbevis. Simuleringer viser tydelig at satellitten er stabil, så et stabilitetsbevis bør absolutt være mulig.

Siden sliding mode regulatoren i denne oppgaven ikke fullt ut utnytter bruken av kvaternionerepresentasjonen, kunne det være ønskelig å få utviklet en sliding mode regulator som utnyttet denne representasjonen fullt ut. Det kan også være interessant å benytte en tilstandsestimator i kombinasjon med sliding mode regulatoren for å innføre mer robusthet i systemet.

Det har blitt undersøkt hvordan systemet oppfører seg med tetraederet plassert utenfor tyngdepunktet, men en fullstendig modell er ikke utviklet. En slik modell hvor innvirkningen fra gravitasjonsgradienten tas med, ønskes utviklet.

For pådragsallokeringen kan det være ønskelig å innføre begrensninger i optimaliseringsproblemet. Disse begrensningene vil for dette tilfelle være reaksjonshjulenes maksimale pådrag.

Det ønskes å utvikle en matematisk modell med gyroer i pyramidekonfigurasjon, for å undersøke hvordan disse kan benyttes som aktuatorer for satellitten.

Det kan også være av interesse å undersøke hvordan man kan optimalisere pådragene i tetraederkonfigurasjonen ved tap av ytelse fra reaksjonshjul eller ved hjulavmetning.

Bibliografi

- [1] Gunnar Staff, Ivar M. Breen, Morten Breivik, Morten Kristoffersen og Trond Johannessen. Orienteringsregulering av mikrosatellitter, aktuatorkonfigurasjon og reguleringsalgoritmer. Ekspert i Team - NTNU 2002.
- [2] Jean-Jacques E. Slotine and Weiping Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall, 1991.
- [3] Michael Mansfield and Colm O'Sullivan. *Understanding Physics*. John Wiley & Sons Ltd., 1998.
- [4] James H. McDuffie and Yuri B. Shtessel. A De-coupled Sliding Mode Controller and Observer for Satellite Attitude Control. 1997.
- [5] Morten Sahlgaard Johansson. Styring av minisatellitt etter separasjon fra bæreraketten. NTNU 2002.
- [6] Ole-Jon Andersen. Styring av minisatellitt under normal operasjon. NTNU 2002.
- [7] Thor I. Fossen. *Marine Control Systems*. Marine Cybernetics ANS, 2002.
- [8] Olav Egeland and Jan Tommy Gravdahl. Modeling and Simulation for Control. NTNU 2001.
- [9] Rafał Wiśniewski. Satellite Attitude Control Using Only Electromagnetic Actuation. Ph.D. Thesis, Aalborg University, 1996.
- [10] Ola Härkegård. Efficient Active Set Algorithms for Solving Constrained Least Squares Problems in Aircraft Control Allocation. Linköpings universitet, 2002.
- [11] Geir Ytrehus. Styring av mikrosatellitt med reaksjonshjul i tetraeder. Prosjektoppg., NTNU, 2002.
- [12] Bong Wie, David Bailey and Cristopher Heiberg. Rapid Multitarget Acquisition and Pointing Control of Agile Spacecraft, Arizona State University, 2002.

- [13] V. J. Lappas, W. H. Steyn and C. I. Underwood. Torque Amplification of control moment gyros. University of Surrey, 2002.
- [14] Jerry L. Fausz, Capt. David J. Richie. Flywheel Simultaneous Attitude Control and Energy Storage Using a VSCMG Configuration. Proc. of 2000 IEEE Int. Conf. on Control Applications, Anchorage, Alaska, 2000.

Tillegg A

Matlabkode

linearController.m

```
%*****
%   File linearController.m
%
%   tau = linearController(in) is the implementation of the
%   Linear State Feedback PD Controller.
%
%*****
function tau = linearController(in)

global I w_0 K

q_acc_d = in(1:4);
q_dot_d = in(5:8);
q_d      = in(9:12);
x_dot    = in(13:19);
x        = in(20:26);

eta_acc_d = q_acc_d(1);
epsilon_acc_d = q_acc_d(2:4);

eta_dot_d = q_dot_d(1);
epsilon_dot_d = q_dot_d(2:4);

eta_d = q_d(1);
epsilon_d = q_d(2:4);

eta_dot = x_dot(1);
epsilon_dot = x_dot(2:4);
```

```

w_B_IB_dot = x_dot(5:7);

eta = x(1);
epsilon = x(2:4);
w_B_IB = x(5:7);

% The desired state vector
x_d = [epsilon_d(1); epsilon_dot_d(1); epsilon_d(2);...
       epsilon_dot_d(2); epsilon_d(3); epsilon_dot_d(3)];

% The actual state vector
x = [epsilon(1); epsilon_dot(1); epsilon(2);...
     epsilon_dot(2); epsilon(3); epsilon_dot(3)];

tau = - K*(x - x_d);

```

microSatellite2.m

```
function xdot2 = microSatellite2(in)

global I w_0 TD I_o K1

% The state space variables
q = in(1:4);
w_B_IB = in(5:7);

% The system input from the controller after actuator allocation
u = in(8:11);

% Normalizing the quaternions - necessary due to numerical inaccuracy
q = q/(q'*q);
eta = q(1);
epsilon = q(2:4);

% Transforming from w_B_IB to w_B_OB for use in the dynamical model update
R_O_B = Rquat(q);
R_B_O = R_O_B';
c2 = R_B_O(:,2);
w_B_OB = w_B_IB + w_0*c2;

% Reaction wheels in a tetrahedron
T = TD;
%T(1,:) = zeros(1,3); % Disabling wheel 1
%T(2,:) = zeros(1,3); % Disabling wheel 2
%T(3,:) = zeros(1,3); % Disabling wheel 3 (simulert som 1. ytelsestap)
%T(4,:) = zeros(1,3); % Disabling wheel 4 (simulert som 2. ytelsestap)

%u(1) = 0; %Disabling wheel 1
%u(2) = 0; %Disabling wheel 2
%u(3) = 0; %Disabling wheel 3
%u(4) = 0; %Disabling wheel 4

% Maximum torque available is 0.01 [Nm]
% u_max = 0.01;
u_max = 1;

for i = 1:4
    if abs(u(i))>u_max
        u(i) = sign(u(i))*u_max;
    end
end
```

```

    end;
end;
u2=u; %u2 settes paa utgangen slik at den kan plottes.

tau = T'*K1*u;

% Uniformly distributed noise
% The expression sign((2*rand(2)-1)) ensures that the noise is either
% area -1 or 1 of the actuator torque because rand(1) gives numbers in
% the area [0.0 1.0]. Multiplying with a percentage of the produced torque
% gives a realistic disturbance effect.
p = 0.4; % 40% noise added to the actuator torque
noise = p*(sign(2*rand(1)-1))*[tau(1); tau(2); tau(3)];
%tau = tau + R_B_0*(noise);

% Gravity gradient torque
g_B = Smtrx(3*w_0^2*R_B_0(:,3))*I*R_B_0(:,3);

% The dynamical equations
eta_dot      = -(1/2)*epsilon'*w_B_0B;
epsilon_dot  = (1/2)*(eta*eye(3) + Smtrx(epsilon))*w_B_0B;
%w_B_IB_dot  = inv(I)*(tau + g_B - Smtrx(w_B_IB)*(I*w_B_IB));

%**umatematisk modell benyttet i hostprosjekt**
% %del 1: grav.grad.
% w_B_IB_dot1 = inv(I)*(g_B - Smtrx(w_B_IB)*(I*w_B_IB));
%
% %del 2: reaksjonshjul
% w_B_IB_dot2 = inv(I_o)*(tau - Smtrx(w_B_IB)*(I_o*w_B_IB));
%
% %sum
% w_B_IB_dot = w_B_IB_dot1 + w_B_IB_dot2;

%Forenklet versjon hvor gravitasjonsgrad. sees bort fra helt,
%i avstand r_b_g fra CG hvor tregghetsmatrise = I_o
%*****Utenfor tyngdepunkt*****
w_B_IB_dot = inv(I_o)*(tau - Smtrx(w_B_IB)*(I_o*w_B_IB));

x_dot2 = [eta_dot; epsilon_dot; w_B_IB_dot; u2];
%u2 returneres kun for aa faa plottet padraget fra reaksjonshjulene.

```

nonlinearController.m

```
%*****
%   File nonlinearController.m
%
%   tau = nonlinearController(in) is the implementation of the
%   Nonlinear Quaternion Feedback PD Controller.
%
%*****

function tau = nonlinearController(in)

global I w_0

q_acc_d = in(1:4);
q_dot_d = in(5:8);
q_d      = in(9:12);
x_dot    = in(13:19);
x        = in(20:26);

eta_acc_d = q_acc_d(1);
epsilon_acc_d = q_acc_d(2:4);

eta_dot_d = q_dot_d(1);
epsilon_dot_d = q_dot_d(2:4);

eta_d = q_d(1);
epsilon_d = q_d(2:4);

eta_dot = x_dot(1);
epsilon_dot = x_dot(2:4);
w_B_IB_dot = x_dot(5:7);

eta = x(1);
epsilon = x(2:4);
w_B_IB = x(5:7);

% Transforming from w_B_IB to w_B_OB
q = [eta; epsilon(1); epsilon(2); epsilon(3)];
R_0_B = Rquat(q);
R_B_0 = R_0_B';
c2 = R_B_0(:,2);
w_B_OB = w_B_IB + w_0*c2;
```

```

% Some vector definitions
epsilon_e = epsilon_d - epsilon;
epsilon_dot_e = epsilon_dot_d - epsilon_dot;

% Quaternion deviation between desired and current attitude
epsilon_tilde = eta_d*epsilon - eta*epsilon_d - Smtrx(epsilon_d)*epsilon;
epsilon_dot_tilde = eta_dot_d*epsilon + eta_d*epsilon_dot - eta_dot*epsilon_d...
                  - eta*epsilon_dot_d...
                  - Smtrx(epsilon_dot_d)*epsilon - Smtrx(epsilon_d)*epsilon_dot;

% Control law - % the nonlinear PD controller gains
Kp = 0.5;
Kd = 2.5;

tau = - Kp*epsilon_tilde - Kd*epsilon_dot_tilde;

```

printSimulation3.m

```
%*****
%\quad File printSimulation3.m
%
%\quad File to print the satellite simulation results.
%
%*****

% Scaling the time to represent number of orbits (easier to relate to)
t = phi_simulated(:,1);
t = t/T_0;

% Plotting the simulation results
figure(1);
SUBPLOT(2,1,1),plot(t,phi_simulated(:,2),'b-.',...
    t,theta_simulated(:,2),'r--', t,psi_simulated(:,2),'g:');
grid;
legend('\phi', '\theta', '\psi');
xlabel('tid [omlop]');
ylabel('[grader]');
Title('Satellittens orienteringsvinkler');
hold on;
SUBPLOT(2,1,1),plot(t,phi_d_simulated(:,2),'k',...
    t,theta_d_simulated(:,2),'k', t,psi_d_simulated(:,2),'k');
hold off;

%figure (2);
SUBPLOT(2,1,2),plot(t,w_B_OB_x_simulated(:,2),'b-',...
    t,w_B_OB_y_simulated(:,2),'r--', t,w_B_OB_z_simulated(:,2),'g:');
grid;
legend('\omega_x', '\omega_y', '\omega_z');
xlabel('tid [oml\U{f8}p]');
ylabel('[rad/s]');
Title('Satellittens vinkelhastigheter (BODY)');

%plotter utgangen paa regulatoren
figure(3);
SUBPLOT(2,1,1),plot(t,regulatorutgang(:,2), ('b-')...
    ,t,regulatorutgang(:,3), ('r--')...
    ,t,regulatorutgang(:,4),('g:'))
grid;
```

```

legend('\tau_1', '\tau_2', '\tau_3');
xlabel('tid [oml\U{f8}p]');
ylabel('Paadrag [Nm]');
Title('Utgangsverdier fra regulatoren');

%Plotter momentpaadrag fra reaksjonshjulene
%figure(4);
SUBPLOT(2,1,2), plot(t, tau2_simulated(:,5), ('b-')...
    ,t, tau2_simulated(:,4), ('r--')...
    ,t, tau2_simulated(:,3), ('k-.'))...
    ,t, tau2_simulated(:,2), ('g:'))
grid;
legend('\tau_1', '\tau_2', '\tau_3', '\tau_4');
xlabel('tid [oml\U{f8}p]');
ylabel('Paadrag [Nm]');
Title('Momentpaadrag fra reaksjonshjulene');

```

S.m

```

%Returnerer den skjev-symmetriske matrisen S til 3x1 vektoren inn.
function ut = S(inn)
q1=inn(1);
q2=inn(2);
q3=inn(3);
ut = [ 0 -q3 q2
      q3 0 -q1
     -q2 q1 0];

```

setupSimulation.m

```
%*****
%File setupSimulation.m
%
%A file to setup the MATLAB/Simulink NSAT-1 reaction wheel simulation.
%
%*****

clear all;

global I w_0 TD K I_o K1 W

% The NSAT 1 satellite's inertia matrix I without gravitation boom
Ix = 4;
Iy = 4;
Iz = 3;

I = diag([Ix Iy Iz]);

% Some useful definitions
kx = (Iy - Iz)/Ix;
ky = (Ix - Iz)/Iy;
kz = (Iy - Ix)/Iz;

% Tetrahedron distribution matrix
% Can be scaled by the motor gains (we assume
% here that all the reaction wheels are identical)
TD = [0          0          -1;
      0          -sqrt(6*3*4)/9  sqrt(4)/6;
      1/6*sqrt(6*4)  sqrt(6*3*4)/18  sqrt(4)/6;
      -1/6*sqrt(6*4)  sqrt(6*3*4)/18  sqrt(4)/6 ];

%*****  uperfekt tetraederkonfigurasjon *****T1
% TD = [0          0          -1;
%       0.5        0.5        0.5*sqrt(2);
%       -0.5        0.5        0.5*sqrt(2);
%       0.2        -sqrt(0.92)  0.2 ];

%*****  uperfekt tetraederkonfigurasjon *****T2
% TD = [0          0          -1;
%       0.2        0.2        -sqrt(0.92);
%       -0.5        0.5        0.5*sqrt(2);
```

```

%      0.25      0.25      sqrt(0.875) ]

%kraftmatrise
k1 = 1;
k2 = 1;
k3 = 1;
k4 = 1;

K1 = [k1 0 0 0
      0 k2 0 0
      0 0 k3 0
      0 0 0 k4];

%vektmatrise
w1 = 1;
w2 = 1;
w3 = 1;
w4 = 1;

W = [w1 0 0 0
     0 w2 0 0
     0 0 w3 0
     0 0 0 w4];

% Some data about the earth and satellite orbit
m = 60; % [kg] Mass of Satellite
M = 5.9742e24; % [kg] Mass of Earth
gamma = 6.6720e-11; % [] Gravity constant
my_g = gamma*M; % [kg] Earth gravity constant

re_e = 6.378137e6; % [m] Equatorial radius of Earth
rp_e = 6.356752e6; % [m] Equatorial radius of Earth
eccentricity = sqrt(1 - (rp_e/re_e)^2); % Eccentricity of the ellipsoid
h_s = 600e3; % [m] Satellite orbit (distance from
% surface to satellite)
r_total = re_e + h_s; % [m] Distance from satellite to
%Earth center

T_e = round (8.6164130e4); % [s] Integer length of sidereal day
w_E = 2*pi/(T_e); % [rad/s] Earth Angular Velocity
w_0 = sqrt( my_g/( r_total^3 ) ); % [rad/s] Satellite Angular Velocity

T_0 = 2*pi/w_0; % [s] Satellite Orbit Period

```

```

v_0 = h_s*w_0; % [m/s] Satellite Velocity

% The reference model

%w_n = 0.035;
%zeta = 1.0;

w_n = 0.022;
%w_n = 2.0;
zeta = 1.0;

% Initial attitude in Euler angles
deg_0 = (pi/180)*[0; 0; 0];
% Initial attitude in Euler parameters (quaternions)
q_0 = euler2q(deg_0);

% Transforming from w_B_OB to w_B_IB
R_0_B = Rquat(q_0);
R_B_0 = R_0_B';
c2 = R_B_0(:,2);
w_B_OB = [0; 0; 0];
w_B_IB = w_B_OB - w_0*c2;

% The initial state vector
x0 = [q_0(1); q_0(2); q_0(3); q_0(4); w_B_IB(1); w_B_IB(2); w_B_IB(3)];

% The linearized system matrices
A = [0 1 0 0 0 0;
     -4*kx*w_0^2 0 0 0 0 (1 - kx)*w_0;
     0 0 0 1 0 0;
     0 0 -3*ky*w_0^2 0 0 0;
     0 0 0 0 0 1;
     0 -(1 - kz)*w_0 0 0 -kz*w_0^2 0
    ];
B = [0 0 0
     1/(2*Ix) 0 0;
     0 0 0;
     0 1/(2*Iy) 0;
     0 0 0;
     0 0 1/(2*Iz)
    ];
C = [1 0 0 0 0 0;
     0 0 1 0 0 0;

```

```

    0 0 0 0 1 0
    ];

% The linearized system's eigenvalues
eigenValues = eig(A);
% If the system can be controlled
rang = rank( ctrb(A,B) );

% Wanted poles (calculated from a theoretical analysis)
p1 = -0.1 + 0.1i;
p2 = -0.1 - 0.1i;
p = [p1; p2; p1; p2; p1; p2];
% Calculation of the state feedback matrix K; pole placement technique
K = place(A,B,p);

%Med tetraeder utenfor tyngdepunktet
r_b_g = [.5
        .5
        .5]      %avstandsvektoren fra punkt 0 til CG.

I_o = I-m*(S(r_b_g))^2 %Tregghetsmatrisen i punktet 0.

```

transformAttitudeSpeed_OB.m

```

%*****
% File transformAttitudeSpeed_OB.m
%
% Transforms the attitude speed from the body-to-inertial to
%   body-to-orbit.
%
%*****
function w_B_OB = transformAttitudeSpeed_OB(in);

global w_0

q = in(1:4);
w_B_IB = in(5:7);
w_0_IO = [0; -w_0; 0];

% Normalizing the quaternions

```

```

q = q/norm(q);

% Transforming from w_B_IB to w_B_OB for use in the dynamical model update
R_O_B = Rquat(q);
R_B_O = R_O_B';

w_B_OB = w_B_IB - R_B_O*w_O_IO;

```

allokering.m

```

function u2 = allokering(in)

global TD K1 W
tau = in(1:3);
u3 = alloc(K1,TD',W,tau);
u2 = u3;

```

slidingmode.m

```
%*****
%   File slidingmode.m
%
%   tau = slidingmode(inn) is the implementation of the
%   Sliding Mode Controller.
%
%*****
function tau = slidingmode(inn)

global I w_0

%inngangsverdier
q_acc_d = inn(1:4);
q_dot_d = inn(5:8);
q_d      = inn(9:12);
x_dot    = inn(13:19);
x        = inn(20:26);

%setter onskede navn paa inngangsverdiene
eta_acc_d = q_acc_d(1);
epsilon_acc_d = q_acc_d(2:4);

eta_dot_d = q_dot_d(1);
epsilon_dot_d = q_dot_d(2:4);

eta_d = q_d(1);
epsilon_d = q_d(2:4);

eta_dot = x_dot(1);
epsilon_dot = x_dot(2:4);
w_B_IB_dot = x_dot(5:7);

eta = x(1);
epsilon = x(2:4);
w_B_IB = x(5:7);

% Transforming from w_B_IB to w_B_0B
q = [eta; epsilon(1); epsilon(2); epsilon(3)];
R_0_B = Rquat(q);
R_B_0 = R_0_B';
c2 = R_B_0(:,2);
```

```

w_B_OB = w_B_IB + w_0*c2;

%*****Sliding mode controller*****

% Transforming from w_B_IB to w_B_OB
q = [eta; epsilon(1); epsilon(2); epsilon(3)];
R_O_B = Rquat(q);
R_B_O = R_O_B';
c2 = R_B_O(:,2);
w_B_OB = w_B_IB + w_0*c2;

T = S(epsilon); %T er den skjevsymmetriske matrisen
                %til 3x1 vektoren epsilon.
M = eta*eye(3)+T; %M er matrisen M(Q)

%avvik
epsilon_e = epsilon_d - epsilon;
%epsilon_dot_e = epsilon_dot_d - epsilon_dot;
epsilon_dot_e = epsilon_dot_d - 0.5*M*w_B_OB;

%*****K-matrise*****
%K = 0.8*eye(3);
%K = 0.5*eye(3);
K = 0.2*eye(3); %plottet

%*****sliding manifold*****
sigma_q = epsilon_dot_e + K*epsilon_e; %=0

%*****control torque*****

thickness = 0.02; %thickness of the sliding boundary layer
%thickness = 0.002;
%thickness = 0.006;
%thickness = 0.05;

U_max = 0.02;
%U_max = 1;

sat_se = zeros(3,1);

for II = 1:3,

```

```

sat_se(II) = tanh(sigma_q(II)/thickness);

%Saturation-funksjonen under er byttet ut med tanh-funksjonen over.
%   if sigma_q(II) < -thickness
%       sat_se(II) = -1;
%   elseif abs(sigma_q(II)) <= abs(thickness)
%       sat_se(II) = sigma_q(II)/thickness;
%   elseif sigma_q(II) > thickness
%       sat_se(II) = 1;
%   end
end

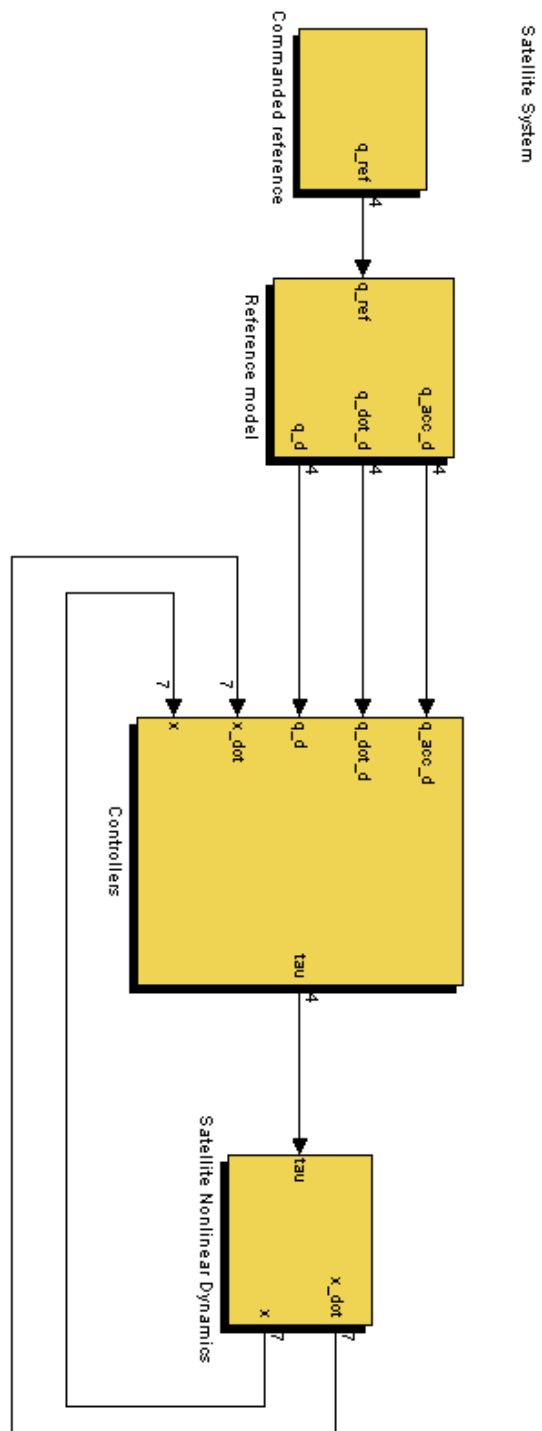
tau = U_max*sat_se;

```

Tillegg B

Simulinkdiagrammer

Her presenteres de ulike delene av satellittsystemet implementert i simulink. Figur B.1 viser systemet på øverste nivå. De fire følgende figurene viser innholdet i hver boks.



Figur B.1: Satellite system.

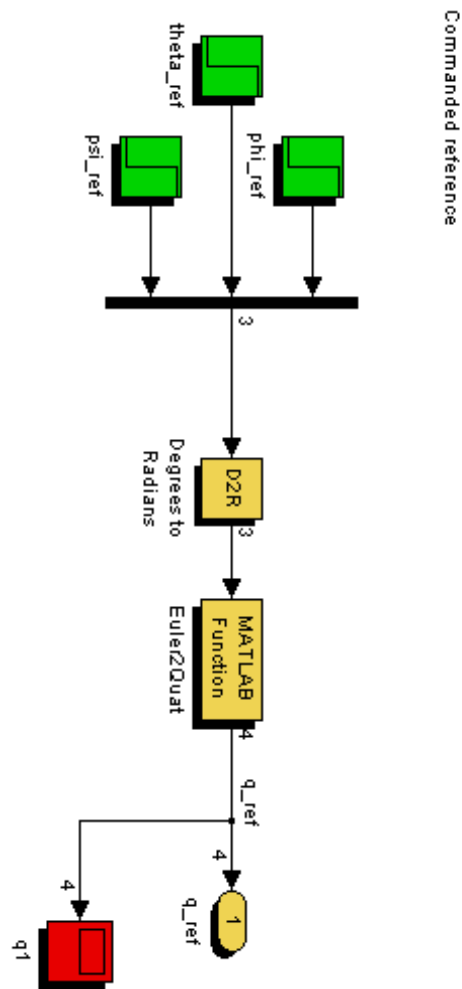
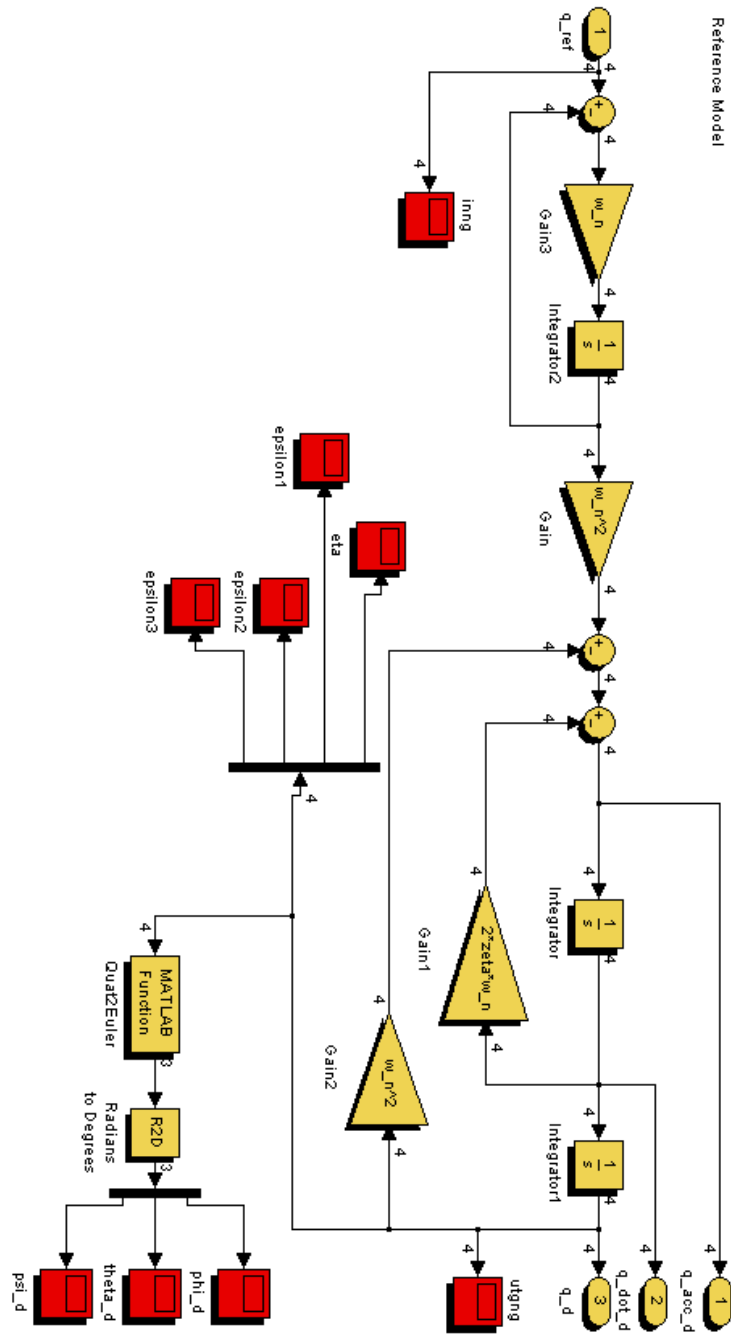
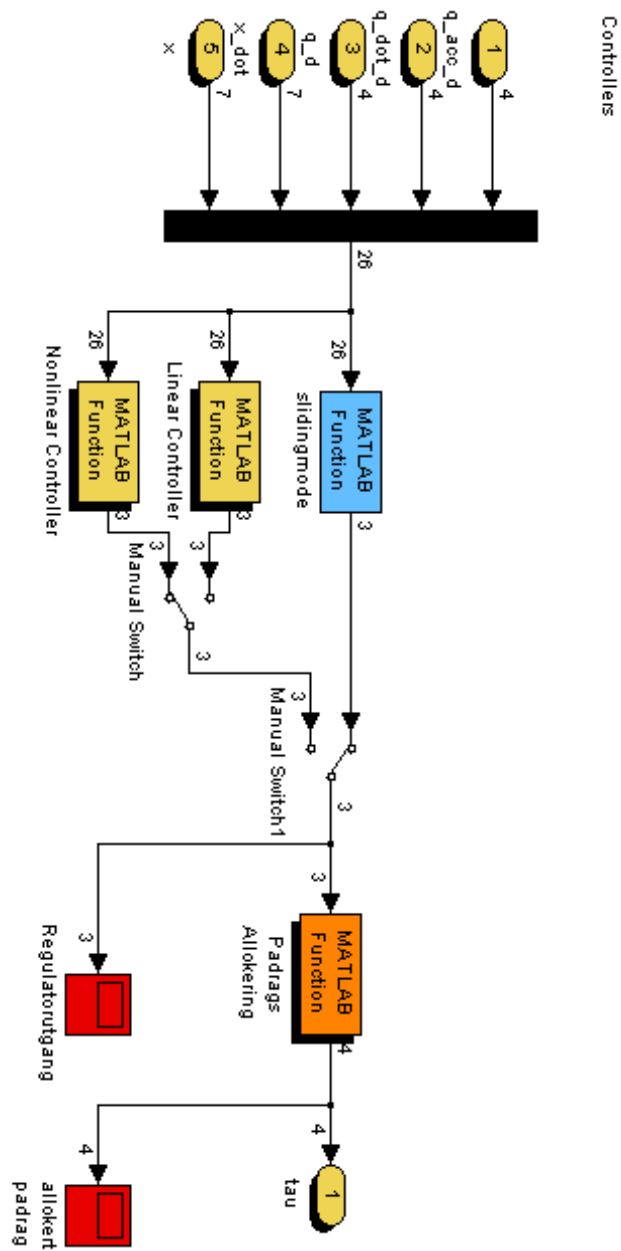


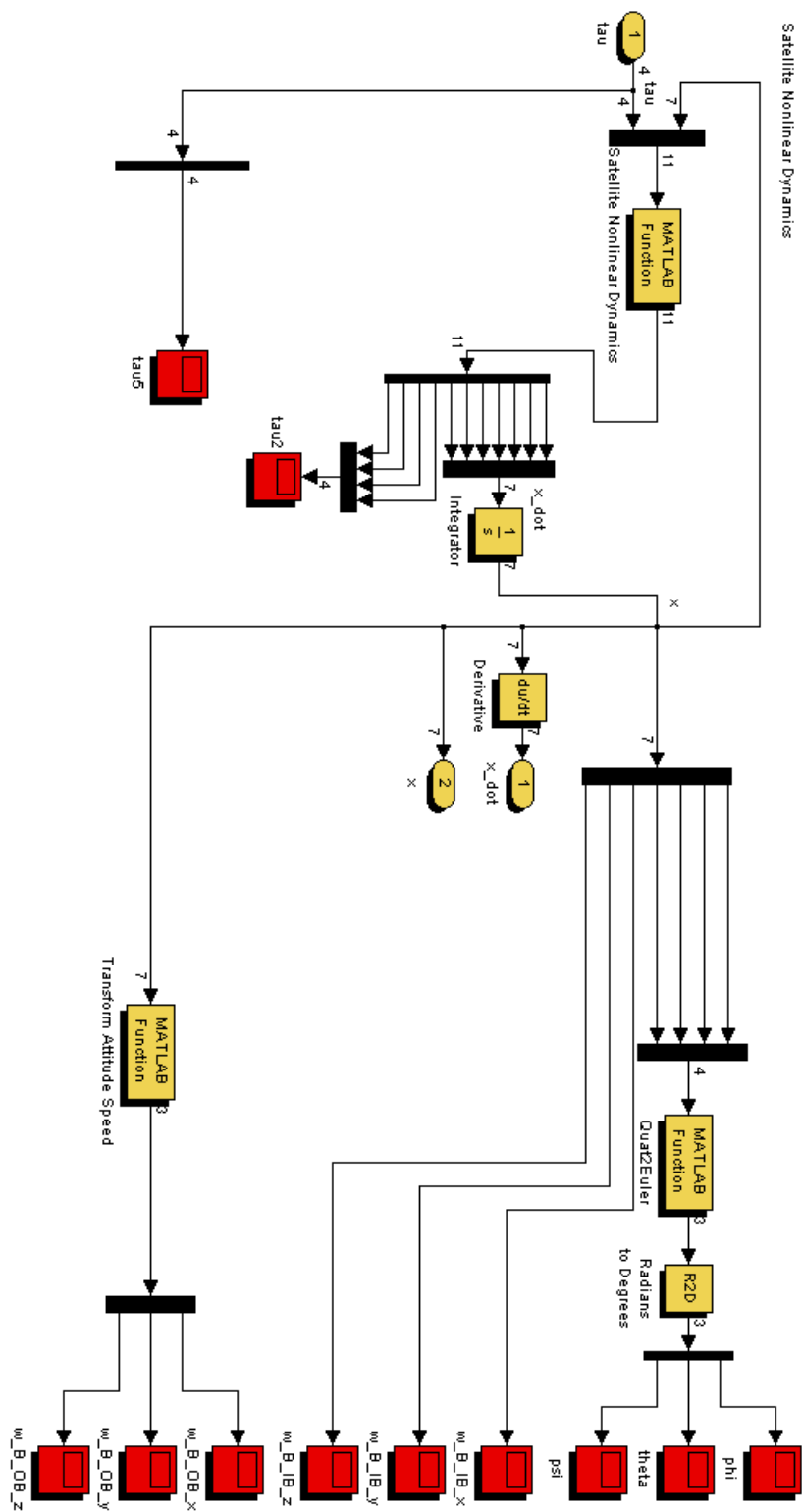
Figure B.2: Commanded reference



Figur B.3: Reference Model



Figur B.4: Controllers



Figur B.5: Satellite Nonlinear Dynamics